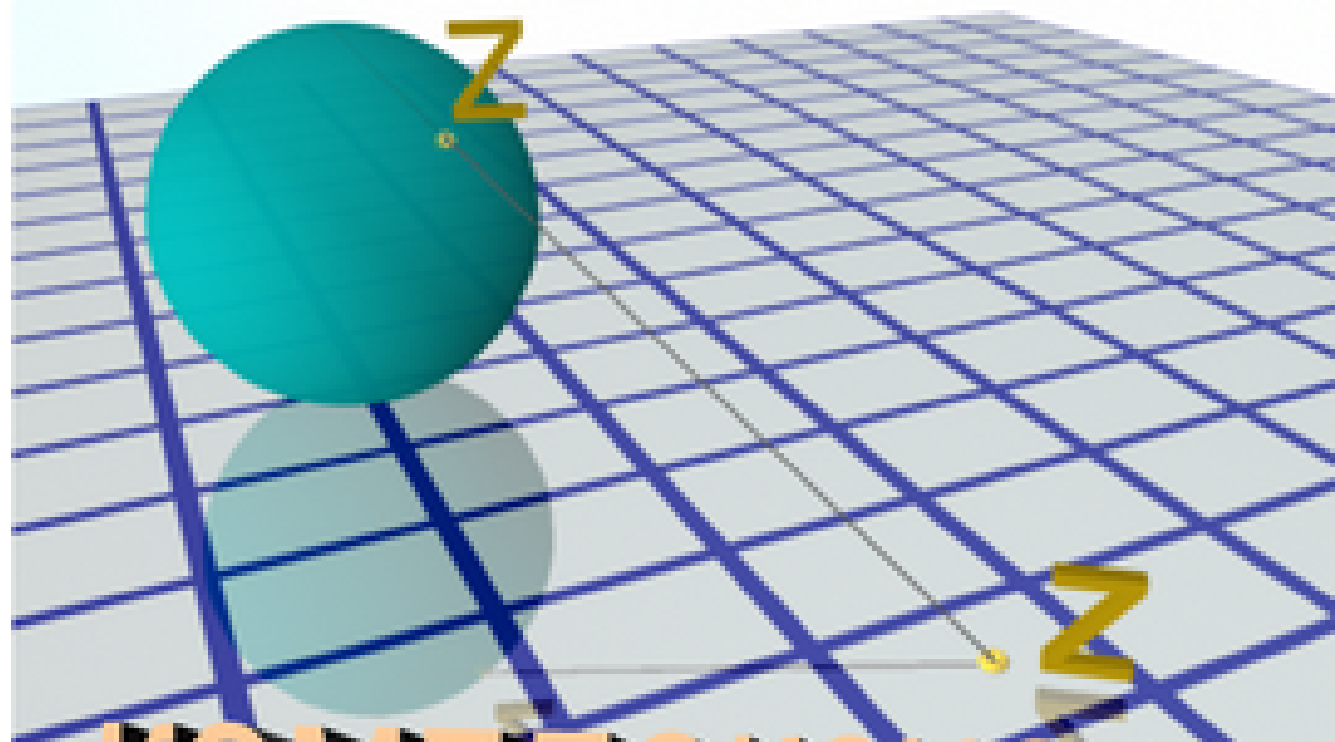
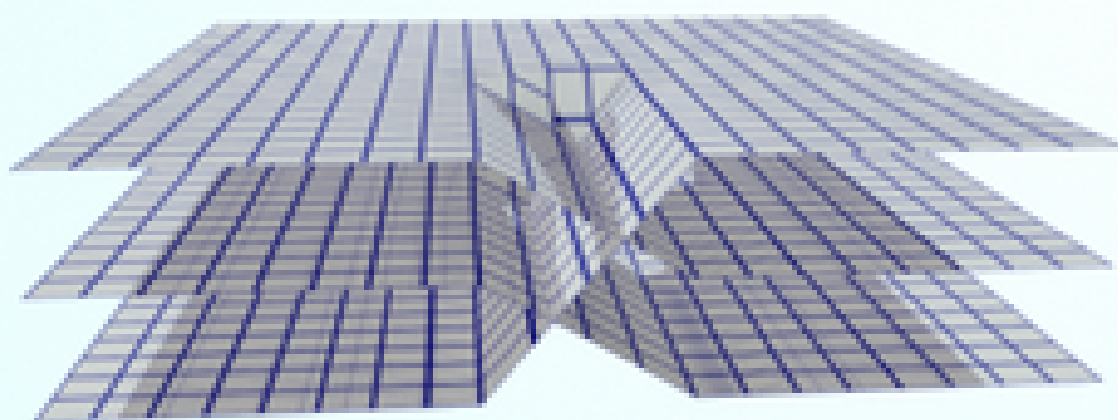


Теория функций

∞



КОМПЛЕКСНОГО переменного



Содержание

Условные обозначения	4
1. Основные понятия	5
1.1. Комплексные числа и действия над ними	5
1.2. Сфера Римана. Расширенная комплексная плоскость	7
1.3. Предел последовательности комплексных чисел	7
1.4. Числовые ряды в \mathbb{C} . Критерий Коши. Необходимое условие сходимости. Абсолютная сходимость	7
2. Функции комплексного переменного	10
2.1. Определение, предел, непрерывность	10
2.2. Обратные функции. Однолиственность	13
3. Функциональные ряды	15
3.1. Основные понятия	15
3.2. Степенные ряды	17
3.3. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции	20
4. Аналитические функции	21
4.1. Производная и дифференциал функции комплексного переменного	21
4.2. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции	21
4.3. Понятие и свойства аналитической функции	23
4.4. Гармонические функции	24
4.5. Сопряжённые гармонические функции	25
4.6. Геометрический смысл модуля и аргумента производной	26
5. Конформные отображения	26
5.1. Понятие конформного отображения	26
5.2. Теорема Римана и принцип соответствия границ	27
5.3. Дробно-линейная функция	28
5.3.1. Понятие и простейшие свойства дробно-линейной функции	28
5.3.2. Круговое свойство дробно-линейной функции	29
5.3.3. Леммы об окружностях	30
5.3.4. Симметричное свойство и свойство о трёх точках	32
5.3.5. Отображения стандартных областей элементарными функциями	34
6. Интеграл функции комплексного переменного	39
6.1. Понятие и свойства интеграла функции комплексного переменного	39
6.2. Интегральная теорема Коши	40
6.2.1. Интегральная теорема Коши для односвязной области	40
6.2.2. Интегральная теорема Коши для многосвязной области	41
6.3. Первообразная	42
6.4. Интегральная формула Коши	43
6.5. Интеграл типа Коши	47
6.6. Теорема Лиувилля	48
6.7. Теорема Морера	48
6.8. Теорема о среднем и принцип максимума модуля	49

7. Ряд Тейлора	50
7.1. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов	50
7.2. Вывод формулы суммы геометрической прогрессии	54
7.3. Ряд Тейлора	55
7.4. Изолированные нули и теорема единственности	56
8. Ряд Лорана	58
8.1. Разложение аналитической в кольце функции в ряд	58
8.2. Неравенства Коши	62
9. Изолированные особые точки и их классификация	63
9.1. Определение и примеры изолированных особых точек	63
9.2. Поведение функции в окрестности изолированной особой точки	66
9.2.1. Поведение функции в окрестности устранимой особой точки	66
9.2.2. Поведение функции в окрестности полюса	67
9.2.3. Поведение функции в окрестности существенно особой точки	67
9.3. Бесконечно удалённая особая точка	68
9.4. Приёмы, упрощающие классификацию изолированных особых точек.	69
10. Вычеты в изолированных особых точках	78
10.1. Определение и формулы вычисления вычета	78
10.1.1. Вычет в устранимой особой точке	78
10.1.2. Вычет в полюсе первого порядка	78
10.1.3. Вычет в полюсе порядка k	79
10.1.4. Вычет в существенно особой точке	79
10.1.5. Вычет в $z = \infty$	79
10.2. Основная теорема о вычетах и следствие из неё	80
11. Вычисление интегралов с помощью вычетов и леммы Жордана	81
11.1. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов	81
11.2. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$. Лемма Жордана	82
11.3. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$	84
11.4. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ с полюсами на \mathbb{R}	85
12. Операционное исчисление	88
12.1. Преобразование Лапласа. Свойства изображения	88
12.2. Свойства преобразования Лапласа	91
12.3. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений	93
12.4. Применение преобразования Лапласа к решению интегральных и интегро - дифференциальных уравнений	94
12.5. Обращение преобразования Лапласа. Формула Меллина	96
Важные формулы	97
Вопросы к экзамену	100
Список литературы.	102

Условные обозначения

В этом курсе используются следующие стандартные обозначения:

\forall	для любого, любой; ("квантор");
\exists	существует; ("квантор");
$!$	единственный;
$: \text{ или } $	такой, что;
$A \Rightarrow B$ $B \Leftarrow A$	$\begin{cases} \text{из } A \text{ следует } B, & A \text{ влечет } B, \\ A \text{ является достаточным условием для } B, \\ B \text{ является необходимым условием для } A; \end{cases}$
\Leftrightarrow	равносильно, тогда и только тогда, необходимо и достаточно;
$\begin{cases} \text{Утв. 1} \\ \text{Утв. 2} \end{cases}$	верны оба утверждения: Утв. 1 и Утв. 2;
$\left[\begin{array}{l} \text{Утв. 1} \\ \text{Утв. 2} \end{array} \right.$	верно одно из утверждений: либо Утв. 1, либо Утв. 2;
\square	окончание доказательства;
$k = \overline{1, n}$	число k принимает все целые значения от 1 до n ;
$f(x) \in C(D)$ $f(x) \in C^k(D)$	функция $f(x)$ непрерывна в области $x \in D$; функция $f(x)$ непрерывна в области $x \in D$ вместе со своими k первыми производными;
∂D \overline{D}	граница области D ; объединение области D и ее границы ∂D : $\overline{D} = D \cup \partial D$;
$G \subset D$ $D \supset G$	область G – подобласть области D ; область G – подобласть области D ;
\mathbb{N}	множество натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$;
\mathbb{Z}	множество целых чисел $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$;
\mathbb{Q}	множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$;
\mathbb{R}	множество действительных чисел, множество точек прямой;
\mathbb{C}	множество комплексных чисел $\mathbb{C} = \{a + ib, a, b \in \mathbb{R}, \text{ символ } i : i^2 = -1\}$;
$\overline{\mathbb{C}}$	множество комплексных чисел и точка $z = \infty$: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

1. Основные понятия

1.1. Комплексные числа и действия над ними

Опр. 1.1. Комплексным числом z будем называть упорядоченную пару (a, b) действительных чисел $a, b \in \mathbb{R}$, условно записываемую в виде:

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

при этом число a называется **действительной частью числа** z и обозначается $a = \operatorname{Re}(z)$, число b называется **мнимой частью числа** z и обозначается $b = \operatorname{Im}(z)$, а символ i называется **мнимой единицей**.

Множество всех комплексных чисел обозначается символом \mathbb{C} .

Если мнимая часть числа z есть ноль, т.е. $z = a + i \cdot 0$, то число z считают действительным, совпадающим с $a \in \mathbb{R}$, а если $z = 0 + ib$, то число z называют **чисто мнимым**.

Простейшие операции на множестве комплексных чисел.

Опр. 1.2. Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$.

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2, \quad \text{и} \quad b_1 = b_2.$$

Число $\bar{z} = a - ib$ называется **комплексно сопряжённым к числу** $z = a + ib$.

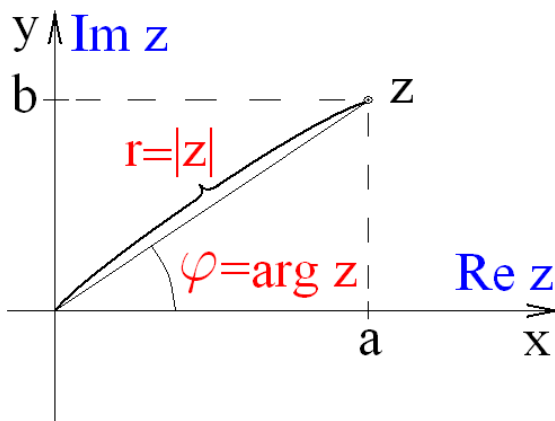
Операции **сложения (вычитания), умножения, деления и возведения в натуральную степень** n определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2), \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1), \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \\ z^n &= \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ раз}}. \end{aligned}$$

Пример 1.1. Из определения операции умножения сразу получаем:

$$i^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + i(0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1 + 0 \cdot i = -1.$$

Комплексная плоскость.



Комплексные числа задаются при помощи пары действительных чисел. Это позволяет представлять эти числа как точки на некоторой координатной плоскости, откладывая по оси абсцисс действительную часть, а по оси ординат – мнимую часть числа. При этом расстояние от начала координат до точки с координатами (a, b) называется **модулем** числа z (т.о. $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$), а угол от положительного направления оси Ox до направления на точку (a, b) , откладываемый против часовой стрелки, – **аргументом** числа z ($\arg z = \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$).

Формы записи комплексного числа.

- $z = a + ib$, $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$ – **алгебраическая форма записи**;
- $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ – **тригонометрическая форма записи**;
- $z = re^{i\varphi}$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ – **показательная форма записи**.

Первые две формы записи комплексного числа легко получаются из геометрической интерпретации множества комплексных чисел как комплексной плоскости. Показательная (или экспоненциальная) форма получается из тригонометрической, если применить формулу Л. Эйлера:

Формула Л. Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Из неё также следуют ещё две важные формулы:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

Надо заметить, что при выполнении сложения удобна алгебраическая форма записи комплексных чисел, а при умножении, делении и возведении в степень часто удобнее показательная форма. В самом деле, пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, а $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Тогда $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$, а $z_1^n = r_1^n e^{in\varphi}$. Эти формулы и проще, чем если бы мы пользовались алгебраической формой записи, и имеют наглядную геометрическую интерпретацию:

- При умножении чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.
- При возведении числа в натуральную степень $n \in \mathbb{N}$ его модуль возводится в степень n , а аргумент умножается на n .

Замечание 1.1. Надо заметить, что на плоскости \mathbb{C} точка, соответствующая числу 1, может быть получена как точка, удалённая от начала координат на 1, расположенная на луче, составляющем с положительным направлением оси Ox угол $2\pi k$ при любом целом $k \in \mathbb{Z}$:

$$1 = e^{2\pi ki}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Отсюда, т.к. любое число при умножении на 1 не изменяется, то

$$z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + 2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg z. \quad (1.2)$$

При этом выражение $\varphi + 2\pi k$ обозначают, в отличие от $\arg z$, следующим образом:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.3)$$

Что же касается $\arg z$, то его значения считают изменяющимися в пределах того или иного полуинтервала длины 2π :

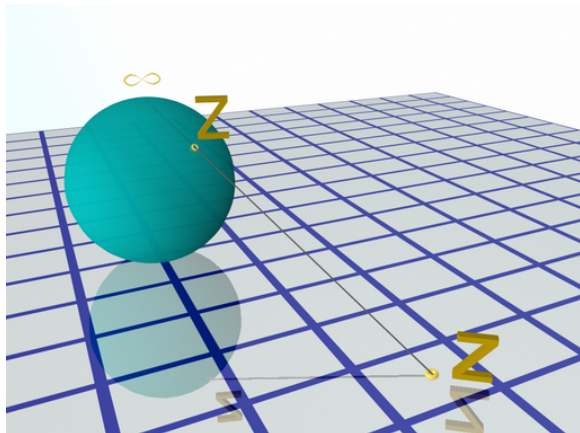
$$\arg z \in (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi], \quad \text{при фиксированном } \varphi_0 \in \mathbb{R}.$$

Например, часто удобно считать, что

$$\arg z \in (0, 2\pi], \quad \text{или} \quad \arg z \in (-\pi, \pi].$$

1.2. Сфера Римана. Расширенная комплексная плоскость

Риман предложил другую геометрическую интерпретацию множества комплексных чисел, — он расположил их на сфере, которая и получила название **сферы Римана**.



Наиболее просто показать, как каждому комплексному числу ставится в соответствие точка сферы, это расположить сферу "южным полюсом" на начало координат комплексной плоскости, а из "северного полюса" провести лучи в каждую точку плоскости. Точку, в которой луч, идущий к числу z , пересечёт сферу, мы и назовём точкой z .

При этом легко заметить, что одна точка сферы, а именно "северный полюс", не соответствует ни одному комплексному числу. Но если мы заставим число "ползти" по комплексной плоскости к бесконечности (в любом направлении), то её образ на сфере Римана будет приближаться к "северному полюсу". Это позволило Риману назвать точку "северного полюса" **бесконечностью** и добавить к самой комплексной плоскости "точку бесконечности". Таким образом получилась **расширенная комплексная плоскость**

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty.$$

1.3. Предел последовательности комплексных чисел

Пусть дано занумерованное бесконечное множество комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда их действительные части и мнимые части образуют последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Поэтому предел последовательности комплексных чисел определить как комплексное число, действительная часть которого равна пределу $\{a_n\}$, а мнимая — пределу $\{b_n\}$ (если оба предела существуют). Однако можно ввести определение стандартным образом.

Опр. 1.3. Число $z \in \mathbb{C}$ мы будем называть **пределом последовательности** $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n, \quad \text{если} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N \quad |z - z_n| < \varepsilon.$$

1.4. Числовые ряды в \mathbb{C} . Критерий Коши. Необходимое условие сходимости. Абсолютная сходимость

Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Опр. 1.4. **Числовым рядом** называется **выражение** $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.

Выражение $\sum_{n=1}^N z_n$ при натуральном N называется **N -ной частичной суммой ряда**.

Число S называется **суммой ряда** $S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$, если существует предел

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N z_n.$$

Пример 1.2. Также как для каждого $x \in \mathbb{R}$ верна формула $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, для комплексного выражения e^i имеет место представление:

$$e^i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}.$$

Теорема 1.1 (Критерий Коши сходимости числового ряда).

Утв.

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ сходится} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

\Rightarrow (Необходимость).

Нам дано, что ряд сходится, то есть \exists число S :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \left| \sum_{k=1}^n z_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^{n+p} z_k - \sum_{k=1}^n z_k \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^{n+p} z_k - S \right) - \left(\sum_{k=1}^n z_k - S \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{n+p} z_k - S \right| + \left| \sum_{k=1}^n z_k - S \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

\Leftarrow (Достаточность).

Числовая последовательность $S_n = \sum_{k=1}^n z_k$ является фундаментальной по условию теоремы. Убедимся, что она сходится к некоторому числу.

1. Ограниченность фундаментальной последовательности.

Пусть последовательность $\{z_k\}$ фундаментальна. То есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon. \quad (1.4)$$

Отсюда, все числа z_k при $k \geq N$ находятся в ε -окрестности числа z_{N+1} . Поэтому все элементы последовательности z_n ограничены по модулю числом

$$\max \{|z_1|, \dots, |z_N|; |z_{N+1}| + \varepsilon\}.$$

2. Теорема Больцано – Вейерштрасса.

Докажем, что у любой ограниченной последовательности существует сходящаяся подпоследовательность. В самом деле, пусть все элементы последовательности $\{z_k\}$ находятся в прямоугольнике $\Pi_1 = \{z = a + ib : a \in [p, q], b \in [r, s]\}$ на плоскости \mathbb{C} . Выберем любой элемент последовательности в этом прямоугольнике и назовём его z_{k_1} – первым элементом подпоследовательности. Поделим Π_1 на 4 равных прямоугольника отрезками, соединяющими середины противоположных сторон. В один из прямоугольников наверняка попадёт бесконечное число элементов последовательности. Обозначим его Π_2 . Выберем в Π_2 любой элемент последовательности и назовём его z_{k_2} – вторым элементом подпоследовательности. Этот прямоугольник мы так же разделим на 4 равных прямоугольника и будем продолжать этот процесс до бесконечности. Таким образом, мы получим подпоследовательность $\{z_{k_m}\}$, причём $\forall m \in \mathbb{N} z_{k_m} \in \Pi_m$. Но последовательность проекций сторон Π_m на ось Ox есть последовательность стягивающихся отрезков, поэтому имеет только одну общую для всех отрезков точку P . Аналогично, последовательность проекций Π_m на ось Oy имеет одну общую для всех отрезков точку R . Таким образом, существует ровно одна точка, общая для всех прямоугольников Π_m :

$$P + iR \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \Pi_m.$$

Эта точка и является пределом подпоследовательности $\{z_{k_m}\}$, поскольку все члены этой подпоследовательности, начиная с номера N находятся в прямоугольнике Π_N , размеры которого в 2^{N-1} раз меньше, чем размеры Π .

3. Единственность частичного предела.

Предположим противное: у последовательности z_k есть две подпоследовательности, сходящиеся к различным пределам:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_{k_m} = A, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} z_{k_l} = B, \quad A \neq B.$$

Выберем в (1.4) параметр $\varepsilon = \frac{A-B}{4}$. Тогда все элементы последовательности z_k , начиная с номера $N+1$, попадают в окрестность радиуса $\varepsilon = \frac{A-B}{4}$ числа z_{N+1} . Однако, за пределами этой окрестности неизбежно окажется хотя бы одно из чисел A или B , вместе со своей ε -окрестностью, в которой, по предположению, находится бесконечно много элементов одной из подпоследовательностей. Полученное противоречие доказывает сходимость фундаментальной последовательности.

Поскольку, по условиям теоремы, последовательность S_n фундаментальна, она, по доказанному, имеет предел, который и является суммой ряда. \square

Теорема 1.2 (Необходимое условие сходимости числового ряда).

Усл. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится.

Усл. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Доказательство.

По критерию Коши,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \varepsilon.$$

Возьмём здесь $p = 1$. Получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad |z_{n+1}| < \varepsilon.$$

\square

Абсолютная сходимость.

Опр. 1.5. Если сходится ряд из модулей $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ сходится, то числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ называется **абсолютно сходящимся**.

Утверждение 1.1.

Усл. $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ сходится.

Утв. $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ сходится.

Доказательство.

По критерию Коши сходимости числового ряда, из условия теоремы следует:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k| < \varepsilon.$$

Оценим сумму:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |z_k| < \varepsilon.$$

Поэтому, для ряда $\sum_{k=1}^n z_k$ также выполнено условие критерия Коши, следовательно, он сходится в этой точке. \square

2. Функции комплексного переменного

2.1. Определение, предел, непрерывность

Опр. 2.1. Закон f , ставящий в соответствие каждому числу $z \in D \subseteq \mathbb{C}$ единственное число $w \in \mathbb{C}$, мы будем называть **однозначной функцией комплексного переменного**, определённой на множестве D : $w = f(z)$.

Закон f , ставящий в соответствие каждому числу $z \in D \subseteq \mathbb{C}$ множество k чисел $w \in \mathbb{C}$, мы будем называть **k -значной функцией комплексного переменного**, определённой на множестве D : $w = f(z)$.

Закон f , ставящий в соответствие каждому числу $z \in D \subseteq \mathbb{C}$ бесконечное множество чисел $w \in \mathbb{C}$, мы будем называть **бесконечнозначной функцией комплексного переменного**, определённой на множестве D : $w = f(z)$.

Область D называется **областью определения $f(z)$** , а множество всех w , таких что $\exists z \in D : f(z) = w$, — её **областью значений**.

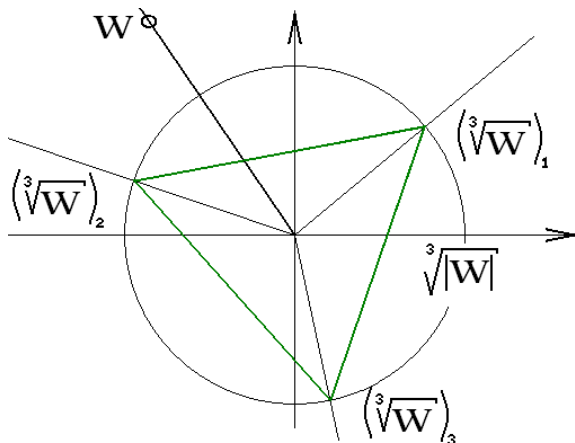
Пример 2.1. Функция $w = z^2$ определена на всей комплексной плоскости \mathbb{C} и является однозначной, т.к. каждому числу $z = re^{i\varphi}$ ставит в соответствие ровно одно число $w = r^2 e^{i \cdot 2\varphi}$.

В то же время, функция $z = \sqrt{w}$ является двузначной, ибо если рассмотреть с учётом замечания на стр. 6 показательную форму записи числа $w = \rho e^{i(\theta+2\pi k)}$, т.е. записать вместо $\arg w = \theta$ многозначный $\text{Arg } w = \theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то извлечение корня из w даёт:

$$w^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\rho} \cdot e^{\frac{i(\theta+2\pi k)}{2}} = \sqrt{\rho} \cdot e^{\frac{i\theta}{2} + \pi k i} = \sqrt{\rho} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot e^{\pi k i} = \sqrt{\rho} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}} \cdot (-1)^k.$$

Таким образом, каждому комплексному числу w соответствует два различных корня из w :

$$\sqrt{w} = \pm \sqrt{\rho} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}}.$$



Аналогично, функция $z = \sqrt[n]{w}$ является n -значной,

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{\frac{i\theta}{n}} \cdot e^{\frac{2\pi k i}{n}}.$$

При этом все n различных корней располагаются на комплексной плоскости на окружности с центром в начале координат и являются вершинами правильного n -угольника.

Опр. 2.2. Функция $w = f(z)$, определённая в области $D \subseteq \mathbb{C}$, **имеет в точке** $z_0 \in D$ **предел, равный** w_0 , если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall z \in D : \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Функция $w = f(z)$, определённая в области $D \subseteq \mathbb{C}$, называется **непрерывной в точке** $z_0 \in D$, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \forall z \in D : \quad |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Функция $w = f(z)$ называется **непрерывной в области** $D \subseteq \mathbb{C}$, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Утверждение 2.1 (Арифметические свойства пределов).

Усл. Однозначные функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют в точке $z = a$ пределы:

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b, \quad \lim_{z \rightarrow a} g(z) = c.$$

Утв. Существуют пределы:

$$1) \lim_{z \rightarrow a} (f(z) \pm g(z)) = b \pm c;$$

$$2) \lim_{z \rightarrow a} (f(z) \cdot g(z)) = b \cdot c;$$

3) При дополнительном условии, что $g(z) \neq 0$ и $c \neq 0$, существует также предел:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{b}{c}.$$

Доказательство. Полностью аналогично доказательству соответствующих свойств пределов функций действительного переменного (1-й семестр). Например, пункт 2) доказывается так:

Пусть функции $f(z)$ и $g(z)$ определены в области $D \subseteq \mathbb{C}$, содержащей точку a . Тогда условие $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b$, $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = c$ по определению означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 : \quad \forall z \in D : \quad 0 < |z - a| < \delta_1 \Rightarrow |f(z) - b| < \frac{\varepsilon}{M}; \quad (2.1)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_2 > 0 : \quad \forall z \in D : \quad 0 < |z - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(z) - c| < \frac{\varepsilon}{M}. \quad (2.2)$$

Число M , появившееся в правых частях последних неравенств (2.1) и (2.2), не влияет на равносильность (2.1) и (2.2) определению предела. Позже мы выберем значение этого числа, исходя из удобства доказательства. Обозначим через $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\forall z \in D : \quad 0 < |z - a| < \delta$ будут выполнены оба неравенства:

$$|f(z) - b| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad |g(z) - c| < \frac{\varepsilon}{M}. \quad (2.3)$$

Оценим разность:

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - bc| &= |f(z)g(z) - bg(z) + bg(z) - bc| \leq |f(z)g(z) - bg(z)| + |bg(z) - bc| = \\ &= |f(z) - b| \cdot |g(z)| + |b| \cdot |g(z) - c| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot (|g(z)| + |b|). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Теперь заметим, что при $0 < |z - a| < \delta$ в силу второго неравенства из (2.3), имеем: $c - \varepsilon < g(z) < c + \varepsilon$, откуда

$$|g(z)| < \max\{|c - \varepsilon|, |c + \varepsilon|\}.$$

Теперь выберем величину M следующим образом:

$$M = \max\{|c - \varepsilon|, |c + \varepsilon|\} + |b|.$$

Тогда из (2.4) получим:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall z \in D: \quad 0 < |z - a| < \delta \Rightarrow |f(z)g(z) - bc| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

То есть выполнено определение следующего предела:

$$\lim_{z \rightarrow a} (f(z) \cdot g(z)) = b \cdot c,$$

что и требовалось доказать. □

Утверждение 2.2 (Арифметические свойства непрерывных функций).

Усл. Однозначные функции $f(z)$ и $g(z)$ непрерывны в точке $z = a$.

Утв. Функции $f(z) \pm g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$, а при дополнительном предположении, что $g(z) \neq 0$, и функция $\frac{f(z)}{g(z)}$, непрерывны в точке a .

Доказательство. По определению непрерывности,

$$\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a), \quad \exists \lim_{z \rightarrow a} g(z) = g(a).$$

В силу Утв. 2.1, существуют пределы:

- 1) $\lim_{z \rightarrow a} (f(z) \pm g(z)) = f(a) \pm g(a)$;
- 2) $\lim_{z \rightarrow a} (f(z) \cdot g(z)) = f(a) \cdot g(a)$;
- 3) При дополнительном условии, что $g(z) \neq 0$, существует также предел:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

То есть функции $f(z) \pm g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$, а при дополнительном предположении, что $g(z) \neq 0$, и функция $\frac{f(z)}{g(z)}$ принимают в точке $z = a$ значения, совпадающие с их пределами в этой точке, следовательно, они непрерывны в $z = a$. □

Пример 2.2. Вычислить предел: $\lim_{z \rightarrow 1-i} \frac{z^2+z}{1-z}$.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1-i} \frac{z^2+z}{1-z} &= \frac{\lim_{z \rightarrow 1-i} (z \cdot z) + z}{\lim_{z \rightarrow 1-i} (1-z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow 1-i} z \cdot \lim_{z \rightarrow 1-i} z + \lim_{z \rightarrow 1-i} z}{1 - \lim_{z \rightarrow 1-i} z} = \\ &= \frac{(1-i)(1-i) + (1-i)}{1 - (1-i)} = \frac{(1-2i-1) + (1-i)}{i} = \frac{1-3i}{i} = \\ &= \left[\text{домножим числитель и знаменатель на число, сопряжённое к знаменателю} \right] = \\ &= \frac{(1-3i)(-i)}{i(-i)} = \frac{-i+3}{1} = 3-i. \end{aligned}$$

2.2. Обратные функции. Однолиственность

Пусть у нас есть две комплексные переменные: $z \in \mathbb{C}$ и $w \in \mathbb{C}$, и пусть функция $w = f(z)$ задаёт соответствие между значениями этих переменных.

Опр. 2.3. Функция $z = g(w)$, задающая соответствие каждому значению w (из области значений функции $f(z)$) всё множество значений переменной z , таких что $f(z) = w$, мы будем называть **функцией, обратной к $f(z)$** .

Пример 2.3. Функция $z = \sqrt{w}$ является обратной к функции $w = z^2$, поскольку каждому комплексному числу $w = \rho e^{i\theta}$ она ставит в соответствие два различных числа z : $z_{1,2} = \pm \sqrt{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}$, обладающих свойством $z_{1,2}^2 = \rho e^{i\theta} = w$. При этом, других комплексных чисел, отличных от $z_{1,2}$, квадрат которых равнялся бы w , нет.

Опр. 2.4. Функция $w = f(z)$ называется **однолистной**, если обратная к ней функция $z = g(w)$ является однозначной.

Функция $w = f(z)$ называется **многолистной (k -листной)**, если обратная к ней функция $z = g(w)$ является многозначной (k -значной).

Функция $w = f(z)$ называется **бесконечнолистной**, если обратная к ней функция $z = g(w)$ является бесконечнозначной.

Пример 2.4. Поскольку функция $z = \sqrt[n]{w}$ является n -значной, то функция $w = z^n$ является n -листной.

Замечание 2.1. Фактически, n -значная, k -листная функция $w = f(z)$ отображает n экземпляров комплексной плоскости z в k экземпляров комплексной плоскости w . (И n , и k могут быть натуральными числами или бесконечностью.)

Пример 2.5. Рассмотрим теперь функцию $z = \ln w$, обратную к $w = e^z$. Представим w в показательной форме: $w = |w|e^{i \arg w}$ и воспользуемся тем, что для действительного числа $|w|$ верно равенство $|w| = e^{\ln |w|}$. Получим: $e^z = w = e^{\ln |w| + i \arg w}$. Отсюда:

$$\ln w = \ln |w| + i \arg w. \quad (2.5)$$

Аналогично, если мы будем вместо $w = |w|e^{i \arg w}$ рассматривать $w = |w|e^{i \text{Arg } w}$, то получим определение бесконечнозначного логарифма:

$$\text{Ln } w = \ln |w| + i \text{Arg } w = \ln |w| + i \arg w + i \cdot 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

Таким образом, функция $w = e^z$ – бесконечнолиственная функция.

Пример 2.6. Приведём пример k -листной, n -значной функции $w = f(z)$.

$$w = z^{\frac{k}{n}}, \quad \text{где } \frac{k}{n} \text{ — несократимая дробь, } k, n \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Опр. 2.5. Область D плоскости $z \in \mathbb{C}$ называется **областью однолиственности функции $w = f(z)$** , если функция $f(z)$ является однолистной в этой области.

Пример 2.7. 1) Функция $w = \sqrt{z}$ однолиственна во всей комплексной плоскости $z \in \mathbb{C}$.

2) Функция Н.Е. Жуковского.

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

Чтобы найти её область однолиственности, выясним, когда нарушается условие однолиственности, т.е. когда обратная функция не является однозначной. Это означает, что найдётся пара различных $z_1 \neq z_2$, таких что $w(z_1) = w(z_2)$. Выясним, когда это возможно: $z_1 + \frac{1}{z_1} = z_2 + \frac{1}{z_2}$, откуда $(z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{z_1 z_2} \right) = 0$. Данное равенство выполнено либо при $z_1 = z_2$, что противоречит нашему выбору этих точек, либо при $z_1 z_2 = 1$.

Итак, условие однолиственности функции Жуковского нарушается в тех и только тех областях, в которых есть точки z_1 и z_2 , такие что $z_1 z_2 = 1$. Соответственно, областями однолиственности функции Жуковского являются, например, внутренность ($|z| < 1$) и внешность ($|z| > 1$) единичного круга, верхняя ($\text{Im } z > 0$) и нижняя ($\text{Im } z < 0$) полуплоскость.

Пример 2.8. Функция $z = \sqrt[3]{w}$, обратная к $w = z^3$, как мы уже знаем, является трёхзначной. При этом, образом каждого сектора

$$0 \leq \arg z < \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3} \leq \arg z < \frac{4\pi}{3}, \quad \frac{4\pi}{3} \leq \arg z < 2\pi$$

при отображении функцией $w = z^3$ будет полная плоскость $w \in \mathbb{C}$. В самом деле:

для сектора $0 \leq \arg z < \frac{2\pi}{3}$ получаем, что аргумент $w = z^3$ меняется в пределах:

$$0 \leq \arg w < 2\pi,$$

для сектора $\frac{2\pi}{3} \leq \arg z < \frac{4\pi}{3}$ получаем, что аргумент $w = z^3$ меняется в пределах:

$$2\pi \leq \arg w < 4\pi,$$

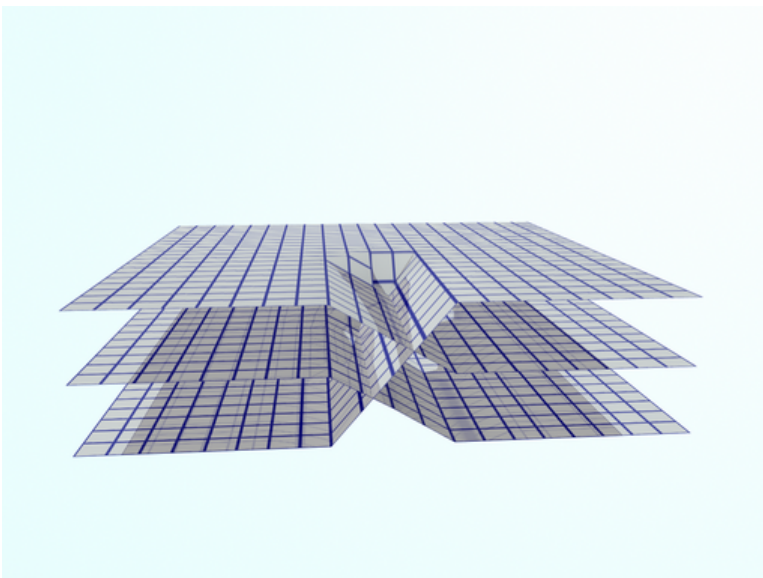
для сектора $\frac{4\pi}{3} \leq \arg z < 2\pi$ получаем, что аргумент $w = z^3$ меняется в пределах:

$$4\pi \leq \arg w < 6\pi,$$

то есть если точка z проползёт по окружности вокруг точки 0, то её образ на плоскости w проползёт вокруг точки $w = 0$ три раза.

Во многих случаях необходимо, чтобы функция была однозначной. Этого можно добиться и от многозначной функции, если определить её, как функцию, отображающую плоскость $z \in \mathbb{C}$ в поверхность, состоящую из нескольких экземпляров плоскости \mathbb{C} , разрезанных по некоторой кривой и склеенных "берег разреза" одной плоскости к "берегу разреза" другой плоскости. Эта поверхность является частным случаем **поверхности Римана** (подробно о поверхности Римана можно прочитать в [1] (Гл.3, §2) и [2] (Гл.1, §5)).

На рисунке изображена поверхность, на которую плоскость z отображает функция $w = z^3$.



Она состоит из трёх экземпляров плоскости \mathbb{C} , разрезанных по действительной полуоси $x > 0$ и склеенных "нижний берег разреза" одной плоскости к "верхнему берегу разреза" другой. Таким образом, функция $w = z^3$ отображает комплексную плоскость \mathbb{C} на изображённую на рисунке поверхность Римана. С другой стороны, функция $z = \sqrt[3]{w}$ однозначно отображает эту поверхность Римана на комплексную плоскость \mathbb{C} . Поэтому, если её областью определения считать не \mathbb{C} , а данную поверхность Римана, то мы получаем однозначную функцию $z = \sqrt[3]{w}$.

3. Функциональные ряды

3.1. Основные понятия

Опр. 3.1. Пусть в области $D \subseteq \mathbb{C}$ заданы функции $\varphi_k(z)$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Данное упорядоченное множество функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ называется **функциональной последовательностью**. При этом множество точек $z \in D_1 \subseteq D$, таких, что $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(z)$, называется **множеством сходимости данной функциональной последовательности**.

Функциональным рядом будем называть выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z).$$

При этом множество точек $z \in D_1 \subseteq D$, таких, что $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \varphi_k(z)$, называется **множеством сходимости ряда**. Сама же сумма $\sum_{k=1}^n \varphi_k(z)$ называется **n -ной частичной суммой ряда**.

Пример 3.1. Рассмотрим функциональную последовательность $\varphi_k = \frac{z}{k(z^2-1)}$. Каждая из функций φ_k определена и непрерывна (как частное непрерывных функций) всюду, кроме точек $z_{1,2} = \pm 1$, в которых знаменатель обращается в нуль. Рассмотрим $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(z)$. Очевидно, что при произвольном фиксированном $z \in D = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ выполнено равенство $\varphi_k(z) = \frac{1}{k} \cdot \frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{k} \cdot \text{const} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому на всей области сходимости функциональная последовательность φ_k сходится к функции 0.

Пример 3.2. Рассмотрим функциональную последовательность $\varphi_k = \frac{z^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Каждая из функций φ_k определена всюду на комплексной плоскости. Рассмотрим $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$. Известно, что при всех $z \in \mathbb{R}$ этот ряд сходится к функции e^z . Логично поэтому определить функцию e^z на всей комплексной плоскости именно как сумму данного ряда:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Равномерная сходимость.

Опр. 3.2. Функциональная последовательность $\{\varphi_k(z)\}$ называется **равномерно сходящейся на множестве $U \subseteq D$ к функции $\varphi(z)$** , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall z \in U \quad |\varphi_n(z) - \varphi(z)| < \varepsilon.$$

Опр. 3.3. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z)$ называется **равномерно сходящимся на множестве** $U \in D$ к функции $\Phi(z)$ $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) \Rightarrow \Phi(z), z \in U \right)$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall z \in U \quad \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(z) - \Phi(z) \right| < \varepsilon,$$

то есть, если функциональная последовательность частичных сумм этого ряда сходится к $\Phi(z)$ равномерно на U .

Критерий Коши и признак Вейерштрасса.

Теорема 3.1 (Критерий Коши равномерной сходимости ряда).

Утв. Функциональный ряд сходится равномерно на множестве U

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) \stackrel{z \in U}{\Rightarrow} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall z \in U \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(z) \right| < \varepsilon.$$

Доказательство.

\Rightarrow (Необходимость).

Нам дано, что ряд сходится равномерно на U , то есть \exists функция $\Phi(z)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \forall z \in U \quad \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(z) - \Phi(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(z) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{n+p} \varphi_k(z) - \sum_{k=1}^n \varphi_k(z) \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^{n+p} \varphi_k(z) - \Phi(z) \right) - \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k(z) - \Phi(z) \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{n+p} \varphi_k(z) - \Phi(z) \right| + \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(z) - \Phi(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

\Leftarrow (Достаточность).

1. Существование суммы ряда $\Phi(z)$. Функциональная последовательность $S_n(z) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(z)$ в каждой точке $z \in U$ является фундаментальной по условию теоремы и, следовательно, сходится к некоторому числу (сходимость фундаментальной последовательности на комплексной плоскости доказана на стр. 8–9). Обозначим это число через $\Phi(z)$ и получим функцию, являющуюся суммой данного ряда на множестве $z \in U$.

2. Равномерная сходимость ряда к функции $\Phi(z)$. Нам дано:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \forall z \in U \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку неравенство $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ выполнено при всех $p \in \mathbb{N}$, в нём можно перейти к пределу при $p \rightarrow \infty$. Получим:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(z) \right| = \left| \Phi(z) - \sum_{k=1}^n \varphi_k(z) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Теорема 3.2 (Признак Вейерштрасса).

Усл. $|\varphi_k(z)| \leq a_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $z \in D \subseteq \mathbb{C}$. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – сходится.

Утв. $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) \Rightarrow, \quad z \in D.$

Доказательство. Так как числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то по критерию Коши для числовых рядов (теорема 1.1, стр. 8)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N \forall p \in \mathbb{N} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Это означает, в силу неравенства $0 \leq |\varphi_k(z)| \leq a_k$, что для того же $N(\varepsilon)$

$$\forall z \in U \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \varphi_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |\varphi_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \varepsilon,$$

откуда по критерию Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ сходится равномерно на U , то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n > N \forall z \in U \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_k(x) \right| < \varepsilon. \quad \square$$

3.2. Степенные ряды

Опр. 3.4. Функциональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ называется **степенным рядом с центром в точке z_0** .

Про степенные ряды можно сказать много: известна их область сходимости, внутри которой они сходятся равномерно и абсолютно и, следовательно, внутри которой их можно интегрировать (и даже дифференцировать) почленно. Более точно, имеют место следующие факты.

Теорема 3.3 (Н. Абель).

Усл. Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ сходится в некоторой точке z_1 .

Утв. 1) Этот ряд сходится в каждой точке круга $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

2) В любом круге $|z - z_0| \leq \alpha |z_1 - z_0|$ при $\alpha \in (0, 1)$ сходимость ряда равномерна.

Доказательство. Пусть z – произвольная точка круга $|z - z_0| \leq \alpha |z_1 - z_0|$ при $\alpha \in (0, 1)$. Представим общий член ряда в виде:

$$c_k(z - z_0)^k = c_k(z_1 - z_0)^k \left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right)^k.$$

Так как нам дано, что ряд сходится в точке z_1 , то (в силу необходимого условия сходимости) его общий член $c_k(z_1 - z_0)^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, следовательно, последовательность $\{c_k(z_1 - z_0)^k\}$ ограничена, т.е. $\exists M \in \mathbb{R} : \forall k \in \mathbb{N} |c_k(z_1 - z_0)^k| \leq M$. Так как $|z - z_0| \leq \alpha |z_1 - z_0|$, т.е. $\left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| \leq \alpha$, то для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем:

$$|c_k(z - z_0)^k| \leq M \alpha^k, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} M\alpha^k$ сходится (например, по признаку Коши: $\sqrt[k]{M\alpha^k} \rightarrow \alpha < 1, k \rightarrow \infty$).

Поэтому, по признаку Вейерштрасса, в круге $|z - z_0| \leq \alpha|z_1 - z_0|$ при $\forall \alpha \in (0, 1)$ исходный ряд сходится равномерно и абсолютно. Таким образом, пункт **2)** доказан.

Мы доказали, что $\forall \alpha \in (0, 1)$ в круге $|z - z_0| \leq \alpha|z_1 - z_0|$ исходный степенной ряд сходится равномерно и абсолютно. Но для любой точки z круга $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ можно подобрать α так, чтобы z оказалась внутри круга $|z - z_0| \leq \alpha|z_1 - z_0|$, в котором, по доказанному имеет место (абсолютная) сходимость. Таким образом, пункт **1)** также доказан. \square

Теорема 3.4 (Коши – Адамар).

Утв. $\exists R \in [0, +\infty]$: степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ абсолютно сходится внутри круга $|z - z_0| < R$ и расходится при $|z - z_0| > R$. При этом число R можно найти по формуле:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}. \quad (К.-А.)$$

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \frac{1}{R}$.

Рассмотрим произвольную точку z_1 , лежащую внутри круга $|z - z_0| < R$:

$$|z_1 - z_0| < R.$$

Числовой ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot |z_1 - z_0|^k$ является знакопостоянным рядом с действительными членами.

Корень степени k из выражения $|c_k| \cdot |z_1 - z_0|^k$ стремится при $k \rightarrow \infty$ к числу, меньшему единицы:

$$\sqrt[k]{|c_k|} \cdot |z_1 - z_0| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{|z_1 - z_0|}{R} < 1.$$

Поэтому, по признаку Коши о сходимости числовых рядов с неотрицательными членами, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \cdot |z_1 - z_0|^k$ сходится. Точку z_1 мы выбрали произвольно внутри круга $|z - z_0| < R$,

следовательно, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ сходится абсолютно всюду в этом круге.

Осталось доказать, что этот ряд расходится всюду в $|z - z_0| > R$. Фиксируем произвольную точку z_2 такую, что

$$|z_2 - z_0| > R.$$

Общий член ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ в точке $z = z_2$ не стремится к нулю, так как:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k(z_2 - z_0)^k|} = \frac{|z_2 - z_0|}{R} > 1.$$

Таким образом, в точке z_2 нарушено необходимое условие сходимости числового ряда (теорема 1.2, стр. 9). \square

Опр. 3.5. Число R мы будем называть **радиусом сходимости**, а **круг** $|z - z_0| < R$ – **кругом сходимости** степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$.

Замечание 3.1. В некоторых случаях более удобно пользоваться другой формулой для определения R :

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|.$$

Заметим, однако, что данный предел не всегда существует, в отличие от верхнего предела в формуле Коши–Адамара.

Замечание 3.2. Когда пишут, что R может принимать значение $R = +\infty$, под этим понимается, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$, и кругом, а точнее, областью, сходимости данного степенного ряда является вся комплексная плоскость \mathbb{C} .

Кроме того, стоит иметь в виду, что каждый степенной ряд сходится хотя бы в одной точке – в точке z_0 центра этого ряда. В самом деле, при $z = z_0$ общий член ряда принимает вид $c_k(z_0 - z_0)^k = \begin{cases} c_0, & \text{при } k = 0; \\ 0, & \text{при } k > 0. \end{cases}$ Поэтому $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z_0 - z_0)^k = c_0 + 0 + 0 + \dots = c_0$.

Утверждение 3.1.

Усл. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ равен R .

Утв. $\forall r \in (0, R)$ степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ сходится внутри круга $|z - z_0| < r$ равномерно.

Доказательство. Поскольку, внутри круга $|z - z_0| < r$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k(z - z_0)^k|} = \frac{|z - z_0|}{R} < \frac{r}{R} < 1,$$

то, начиная с некоторого $k = k_0$, для всех z из круга $|z - z_0| < r$ выполнено неравенство:

$$\sqrt[k]{|c_k(z - z_0)^k|} \leq \alpha < 1, \quad k \geq k_0, \quad \forall z : |z - z_0| < r.$$

Это означает, что все члены ряда $\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ по модулю равномерно мажорируются числовой последовательностью α^k :

$$|c_k(z - z_0)^k| \leq \alpha^k, \quad k \geq k_0, \quad \forall z : |z - z_0| < r.$$

Так как $\alpha < 1$, то ряд $\sum_{k=k_0}^{\infty} \alpha^k$ сходится. По признаку Вейерштрасса (теорема 3.2, стр. 17) ряд

$\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ сходится в круге $|z - z_0| < r$ абсолютно и равномерно. А поскольку добавление к ряду конечного числа слагаемых не влияет на его равномерную сходимость, то и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ сходится в круге $|z - z_0| < r$ абсолютно и равномерно. \square

3.3. Показательная, тригонометрические и гиперболические функции

Введём по определению функции:

Опр. 3.6. • $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ – **показательная функция**;

• $\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ – **синус**;

• $\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$ – **косинус**;

• $\operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ – **гиперболический синус**;

• $\operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ – **гиперболический косинус**.

Некоторые свойства элементарных функций.

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;

2) $(e^{z_1})^{z_2} = e^{z_1 z_2}$;

3) e^z – непрерывна всюду в \mathbb{C} ;

4) $e^{\ln z} = e^{\ln|z|+i \arg z} = |z|e^{i \arg z} = z$;

5) $e^{\operatorname{Ln} z} = e^{\ln|z|+i \arg z+2\pi ki} = |z|e^{i \arg z}e^{2\pi ki} = z \cdot 1^k = z$;

6) $\ln e^z = \ln|e^z| + i \arg e^z = \ln|e^{a+ib}| + i \arg e^{a+ib} = \ln e^a + ib = a + ib = z$, $(b \in [-\pi, \pi])$;

7) $\operatorname{Ln} e^z = \ln|e^z| + i \arg e^z + 2\pi ki = a + ib + 2\pi ki = z + 2\pi ki$;

8) $e^z \neq 0$ в \mathbb{C} ;

9) **Формулы Эйлера:** $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$;

10) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$;

11) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$;

12) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ $(\forall z \in \mathbb{C})$;

13) $\sin z, \cos z$ – непрерывны всюду в \mathbb{C} ;

14) $\sin z = 0 \iff z = \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

15) $\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$;

16) $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$;

17) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$;

18) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$ $(\forall z \in \mathbb{C})$;

19) $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z$ – непрерывны всюду в \mathbb{C} ;

$$20) \operatorname{sh} z = 0 \iff z = \pi ki, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$21) \operatorname{ch} z = 0 \iff z = \frac{\pi i}{2} + \pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что свойства 4) – 7), 9) – 13) и 16) – 18) автоматически следуют из определения 3.6 и свойств экспоненты 1) – 3).

4. Аналитические функции

4.1. Производная и дифференциал функции комплексного переменного

Опр. 4.1. Число $f'(z_0)$ мы будем называть **производной функции $f(z)$ в точке z_0** , если:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Саму функцию $f(z)$ в случае, если этот предел существует, мы будем называть **дифференцируемой в точке z_0** .

4.2. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции

Теорема 4.1 (Условия Коши – Римана).

Усл. Функция $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$, причём в точке (x_0, y_0) функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы.

Утв.

Функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \iff \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$

Доказательство.

\Rightarrow (Необходимость.) Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в $z = z_0$. Тогда:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 + h \\ h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 + ih \\ h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{ih} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{ih} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Поскольку оба полученных выражения должны равняться одному числу $f'(z_0)$, то

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Так как у равных чисел должны совпадать действительные части и мнимые части, то $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$

⇐ (Достаточность.)

Пусть $z - z_0 = h + ip$. В силу дифференцируемости функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ как функций двух действительных переменных, по определению, имеем:

$$\begin{cases} u(x_0 + h, y_0 + p) - u(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}p + \bar{o}(\sqrt{h^2 + p^2}), \\ v(x_0 + h, y_0 + p) - v(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}h + \frac{\partial v}{\partial y}p + \bar{o}(\sqrt{h^2 + p^2}). \end{cases} \quad (4.1)$$

Отсюда,

$$f(z) - f(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}h + \frac{\partial u}{\partial y}p + i \left(\frac{\partial v}{\partial x}h + \frac{\partial v}{\partial y}p \right) + \bar{o}(\sqrt{h^2 + p^2}) \quad \text{или}$$

$$f(z) - f(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) h + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) p + \bar{o}(\sqrt{h^2 + p^2}).$$

Нам дано, что равенства $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ выполнены. Поэтому $\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) p = \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right) p = \left(i \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) ip$, и

$$f(z) - f(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) (h + ip) + \bar{o}(\sqrt{h^2 + p^2}).$$

Выражение $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ – определённое число, не зависит от $h + ip$. Поделим полученное равенство на $z - z_0 = h + ip$, получим:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\bar{o}(\sqrt{h^2 + p^2})}{h + ip} \rightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Таким образом существует число $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)$. □

Следствие 4.1. *Усл.* $f(z)$ дифференцируема в точке $z = z_0$.

Утв. Для $f'(z_0)$ верны формулы:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Пример 4.1. Рассмотрим функцию $e^z = e^{x+iy}$ и выясним, в каких точках комплексной плоскости \mathbb{C} она является дифференцируемой. Для этого представим её в виде

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = u(x, y) + iv(x, y).$$

Проверим теперь выполнение условий Коши–Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Имеем: $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$; $\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$; $\frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$.

Очевидно, условия Коши–Римана выполняются при всех $x, y \in \mathbb{R}$ и, следовательно, **функция e^z является дифференцируемой в каждой точке $z = x + iy \in \mathbb{C}$.**

То же самое верно и для функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, т.к. они все являются суммами экспонент.

4.3. Понятие и свойства аналитической функции

Опр. 4.2. Функция $f(z)$ называется **аналитической в области** $D \subseteq \mathbb{C}$ если она дифференцируема во всех точках D .

В силу примера 4.1, функция $w = e^z$ является аналитической всюду на комплексной плоскости. Этим же свойством обладают функции $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, z^n и т.д. Приведём несколько свойств аналитических функций.

Теорема 4.2 (Свойства аналитических функций).

Усл. $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в области $D \subset \mathbb{C}$.

Утв.

- 1) функция $f(z) \pm g(z)$ аналитична в области D ;
- 2) функция $f(z) \cdot g(z)$ аналитична в области D ;
- 3) если, кроме того, $g(z) \neq 0$ в D , то и функция $\frac{f(z)}{g(z)}$ аналитична в области D ;
- 4) если $f(z)$ аналитична в $g(D)$, то $f(g(z))$ аналитична в области D .

Доказательство.

По Теореме 4.1, стр. 21, аналитичность функции равносильна выполнению для неё условий Коши-Римана. Поэтому для функций $f(z) = u_1 + iv_1$ и $g(z) = u_2 + iv_2$ в области D справедливы равенства:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{\partial v_2}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Покажем, например, что условия Коши-Римана выполнены и для $f(z) \cdot g(z)$.

$$f(z) \cdot g(z) = (u_1 + iv_1)(u_2 + iv_2) = \underbrace{(u_1u_2 - v_1v_2)}_{u_3} + i \underbrace{(u_1v_2 + u_2v_1)}_{v_3} = u_3 + iv_3.$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial x} + i \frac{\partial v_3}{\partial x} &= \frac{\partial(u_1u_2 - v_1v_2)}{\partial x} + i \frac{\partial(u_1v_2 + u_2v_1)}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial x} u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} u_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x} v_2 - \frac{\partial v_2}{\partial x} v_1 + \\ &+ i \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} v_2 + \frac{\partial v_2}{\partial x} u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x} v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial x} u_2 \right] = \left[\text{в силу (4.2)} \right] = \frac{\partial v_1}{\partial y} u_2 + \frac{\partial v_2}{\partial y} u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial y} v_2 + \frac{\partial u_2}{\partial y} v_1 + \\ &+ i \left[\frac{\partial v_1}{\partial y} v_2 - \frac{\partial u_2}{\partial y} u_1 + \frac{\partial v_2}{\partial y} v_1 - \frac{\partial u_1}{\partial y} u_2 \right] = \frac{\partial(u_1v_2 + u_2v_1)}{\partial y} - i \frac{\partial(u_1u_2 - v_1v_2)}{\partial x} = \frac{\partial v_3}{\partial y} - i \frac{\partial u_3}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Равенство друг другу двух комплексных выражений возможно тогда и только тогда, когда совпадают их действительные и мнимые части соответственно. Поэтому (4.3) означает:

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\partial v_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x} = -\frac{\partial u_3}{\partial y},$$

что и требовалось доказать. Аналитичность функций $f(z) \pm g(z)$ и $\frac{f(z)}{g(z)}$ доказывается аналогично.

Докажем пункт 4. Пусть $g(z) = w = u(x, y) + iv(x, y)$, $f(w) = h(u, v) + ip(u, v)$. Запишем условия Коши-Римана для этих функций:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial p}{\partial v}, \quad \frac{\partial h}{\partial v} = -\frac{\partial p}{\partial u}. \quad (4.4)$$

Проверим выполнение условий Коши-Римана для сложной функции

$$f(g(z)) = h(u(x, y), v(x, y)) + iv(u(x, y), v(x, y)).$$

Во-первых:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (4.6)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \equiv \left[\text{в силу (4.4)} \right] = \\ &= -\frac{\partial h}{\partial v} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \equiv \left[\text{в силу (4.5)} \right] \equiv \frac{\partial h}{\partial x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \equiv \left[\text{в силу (4.4)} \right] = \\ &= \frac{\partial h}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial u} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) \equiv \left[\text{в силу (4.6)} \right] \equiv \frac{\partial h}{\partial y}. \end{aligned}$$

В силу теоремы 4.1 (стр. 21), сложная функция $f(g(z))$ аналитична в области D . \square

4.4. Гармонические функции

Опр. 4.3. Функция $u(x, y)$ двух действительных переменных x и y называется **гармонической в области D** , если в D выполнено равенство

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

При этом оператор Δ , стоящий в левой части, называется **оператором Лапласа** или **Лапласианом**.

Пример 4.2. Функции $u = ax + by + c + d$, $v = e^x \sin y$ являются гармоническими в \mathbb{R}^2 , а функция $w = \ln(x^2 + y^2)$ – в $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. (Проверить самостоятельно)

4.5. Сопряжённые гармонические функции

Опр. 4.4. Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ называются **сопряжёнными гармоническими в области D** , если

1) каждая из них гармонична в D : $\Delta u = \Delta v = 0$;

2) в D выполнены равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Теорема 4.3.

Усл. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая функция в D . Кроме того, $u, v \in C^2(D)$.

Утв. $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – сопряжённые гармонические функции.

Доказательство.

1) Из условия $u, v \in C^2(D)$ следует, что смешанные производные этих функций не зависят от порядка дифференцирования, например, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

Убедимся, что $\Delta u = 0$ в D :

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \\ &= \left[\text{по условиям Коши-Римана} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0 \end{aligned}$$

Тот факт, что $\Delta v = 0$ в D проверяется аналогично.

2) Сразу следует из определения 4.4 и Теоремы 4.1, стр. 21 (Условия Коши–Римана). □

Пример 4.3. Рассмотрим $f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Её действительная и мнимая части – функции $e^x \cos y$ и $e^x \sin y$ – образуют сопряжённую пару гармонических функций.

Теорема 4.4.

Усл. $u(x, y)$ – гармоническая функция в D .

Утв. $\exists v(x, y)$ сопряжённая к $u(x, y)$ гармоническая функция. (другими словами, всегда найдётся $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ – аналитическая функция в D с действительной частью $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$.)

Пример 4.4. Рассмотрим $u(x, y) = x + y$. Чтобы найти сопряжённую функцию $v(x, y)$, учтём, что $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 = \frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = 1 = -\frac{\partial v}{\partial x}$, откуда

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

Этим условиям удовлетворяет, например, функция $v(x, y) = -x + y$. Таким образом, функции $u(x, y) = x + y$ и $v(x, y) = -x + y$ образуют сопряжённую пару гармонических функций.

Найдём функцию $f(z) = u + iv$.

$$f(z) = x + y + i(-x + y) = x + iy - i(x + iy) = z - iz = (1 - i)z.$$

4.6. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ и отображает область D плоскости z в область G плоскости w . Представим её производную в произвольно заданной точке $z_0 \in D$ в показательной форме:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = k e^{i\alpha}. \quad (4.7)$$

Тогда отображение, осуществляемое функцией $f(z)$, переводит бесконечно малую окрестность точки $z_0 \in D$ в подобную окрестность точки $w_0 = f(z_0) \in G$, **поворачивая её на угол α и растягивая в k раз.**

Убедимся в этом. Из (4.7) следует

$$\Delta w = \Delta z \cdot k \cdot e^{i\alpha} + \bar{o}(\Delta z), \quad \text{при } \Delta z \rightarrow 0.$$

Рассмотрим главное слагаемое: $\Delta z \cdot k e^{i\alpha}$. Поскольку при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются,

$$|\Delta w| \approx k |\Delta z|, \quad \arg(\Delta w) \approx \arg(\Delta z) + \alpha. \quad (4.8)$$

Таким образом, функция $f(z)$ растягивает в k раз окрестность точки z_0 и поворачивает её на угол α .

Пример 4.5. Рассмотрим $f(z) = 2iz$. Её действительная и мнимая части – функции $u(x, y) = -2y$ и $v(x, y) = 2x$. Легко убедиться, что на всей комплексной плоскости выполнены условия Коши – Римана: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2$, поэтому $f(z)$ аналитична всюду на \mathbb{C} . При этом её производная, в силу следствия 4.1, стр. 22, равна

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Таким образом, эта функция поворачивает комплексную плоскость на угол $\frac{\pi}{2}$ и растягивает её в 2 раза.

5. Конформные отображения

5.1. Понятие конформного отображения

Опр. 5.1. Отображение области D комплексной плоскости z на область G комплексной плоскости w обладает **свойством сохранения углов**, если угол между любыми двумя пересекающимися кривыми в D равен углу между их образами.

Отображение области D комплексной плоскости z на область G комплексной плоскости w обладает **свойством постоянства растяжения**, если образы всех бесконечно малых отрезков с общей вершиной в D в одинаковое число раз длинее (короче) своих пообразов. (При этом коэффициент растяжения может быть различным для отрезков, не имеющих общей вершины.)

Замечание 5.1. Как мы установили в пункте 4.6, если функция $w = f(z)$ аналитична в D , то отображение, которое оно задаёт, обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжения во всех точках, где определены модуль и аргумент производной. Поскольку $w = f(z)$ аналитична в D , то единственные точки, где нарушается это условие, это точки, в которых $f'(z) = 0$ (аргумент числа 0 не определён). В остальных точках это отображение является отображением подобия. Оно подобным образом растягивает окрестность каждой точки, при этом поворачивая её на некоторый угол. В частности, если рассмотреть любые две пересекающиеся в некоторой точке $z \in D$ кривые, то их образы, будучи повёрнуты в точке пересечения на один и тот же угол, будут пересекаться под тем же самым углом, что и исходные кривые.

Опр. 5.2. Взаимно-однозначное отображение области D комплексной плоскости z на область G комплексной плоскости w называется **конформным в точке $z \in D$** , если оно обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжения в окрестности этой точки. Взаимно-однозначное отображение области D комплексной плоскости z на область G комплексной плоскости w называется **конформным в области D** , если оно обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжения в этой области.

Утверждение 5.1.

Усл. Однозначная однолистная функция $w = f(z)$ аналитична в односвязной области D и отображает её на односвязную область G . Кроме того, $f'(z) \neq 0$ в D .

Утв. Отображение D на G , задаваемое функцией $f(z)$, конформно.

Доказательство. В силу геометрического смысла производной и замечания 5.1. □

5.2. Теорема Римана и принцип соответствия границ

Теорема 5.1.

Усл. Граница односвязной области D содержит более одной точки.

Утв. Существует конформное отображение области D на внутренность единичного круга $|w| < 1$ плоскости w .

Без доказательства.

Замечание 5.2. Теорему Римана часто формулирую в другом, равносильном виде:

Если границы односвязных областей D и G содержат более одной точки, то существует конформное отображение области D на G .

Теорема 5.2 (Принцип соответствия границ).

Усл. $w = f(z)$ – однолистная аналитическая в области D и непрерывная в \bar{D} функция, взаимно-однозначно отображающая границу $\partial D = \Gamma$ области D на некоторый контур C в плоскости w . $f(z)$ сохраняет направление обхода этого контура.

Утв. $f(z)$ осуществляет конформное отображение области D на внутренность контура C в плоскости w .

Без доказательства.

5.3. Дробно-линейная функция

5.3.1. Понятие и простейшие свойства дробно-линейной функции

Опр. 5.3. Функция $w = \lambda \frac{\alpha+z}{\beta+z}$, где $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\lambda \neq 0, \alpha \neq \beta$), называется **дробно-линейной функцией**.

Замечание 5.3. Дробно-линейная функция, очевидно, является суперпозицией трёх простейших функций: $w = \lambda \frac{\alpha+z}{\beta+z} = f_3(f_2(f_1(z)))$, где

$$f_1(z) = \xi = \beta + z, \quad f_2(\xi) = \zeta = \frac{1}{\xi}, \quad f_3(\zeta) = w = \lambda(1 + (\alpha - \beta)\zeta).$$

Поэтому её свойства определяются свойствами линейной функции (f_1 и f_3) и функции $\frac{1}{z}$.

Замечание 5.4. Обратной к $w = f(z)$ функцией будет также дробно-линейная функция:

$$z = \frac{\lambda\alpha - \beta w}{w - \lambda}.$$

Теорема 5.3 (Простейшие свойства дробно-линейной функции).

Усл. $f(z) = w = \lambda \frac{\alpha+z}{\beta+z}$, где $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\lambda \neq 0, \alpha \neq \beta$).

Утв.

- 1) функция $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{z = -\beta\}$;
- 2) функция $f(z)$ однозначна и однолистка;
- 3) функция $f(z)$ осуществляет конформное отображение полной плоскости z на полную плоскость w .

Доказательство.

1. В силу замечания 5.3, для проверки аналитичности дробно-линейной функции достаточно проверить аналитичность функций $w_1(z) = z_0 + z_1 z$ и $w_2(z) = \frac{1}{z}$. Убедимся, что для этих функций выполнены условия Коши-Римана.

$$w_1(z) = z_0 + z_1 z = a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)(x + iy) = (a_0 + a_1 x - b_1 y) + i(b_0 + a_1 y + b_1 x) = u_1 + iv_1.$$

Во всей плоскости \mathbb{C} справедливы равенства:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = a_1 = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = -b_1 = -\frac{\partial v_1}{\partial x}.$$

Аналогично, рассмотрим $w_2(z) = \frac{1}{z}$ всюду в $\mathbb{C} \setminus z = 0$:

$$w_2(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = u_2 + iv_2.$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Таким образом, линейная функция и $w_2 = \frac{1}{z}$ аналитичны всюду, кроме точки, в которой знаменатель w_2 обращается в 0. Поэтому дробно-линейная функция $f(z) = w = \lambda \frac{\alpha+z}{\beta+z}$ аналитична

в $\mathbb{C} \setminus \{z = -\beta\}$.

2. Проверим однозначность и однолиственность функций $w_1(z) = z_0 + z_1z$ и $w_2(z) = \frac{1}{z}$.

Однозначность. Каждому $z = x + iy$ соответствует единственное число

$$w_1 = z_0 + z_1z = a_0 + ib_0 + (a_1 + ib_1)(x + iy) = (a_0 + a_1x - b_1y) + i(b_0 + a_1y + b_1x).$$

Поскольку $\operatorname{Re} w_1$ и $\operatorname{Im} w_1$ определены единственным образом, функция $w_1(z)$ однозначна.

Каждому $z = re^{i\varphi+2\pi ki}$ соответствует единственное число

$$w_2(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi-2\pi ki} \equiv \frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi}.$$

Поскольку $|w_2|$ и $\arg w_2$ определены единственным образом, функция $w_2(z)$ однозначна.

Однолиственность. Обратной функцией к $w_1(z)$ является, очевидно, функция $z = \frac{w_1 - z_0}{z_1}$. Она также является линейной, следовательно, по доказанному, она однозначна.

Обратной функцией к $w_2(z)$ является функция $z = \frac{1}{w_2}$. Однозначность такой функции мы также выяснили в пункте 1. данного доказательства.

3. По утверждению 5.1 (стр. 27) нам надо проверить, что $f(z)$ – однозначная однолиственная функция аналитична в односвязной области $\mathbb{C} \setminus \{z = -\beta\}$ и отображает её на область $\mathbb{C} \setminus \{w = \lambda\}$, причём, $f'(z) \neq 0$ в $\mathbb{C} \setminus \{z = -\beta\}$. Аналитичность, однозначность и однолиственность мы установили в пунктах 1. и 2. этого доказательства. Убедимся, что $f' \neq 0$:

$$f'(z) = \left(\lambda \frac{\alpha + z}{\beta + z} \right)' = \left(\lambda + \frac{\lambda(\alpha - \beta)}{\beta + z} \right)' = \frac{\lambda(\beta - \alpha)}{(\beta + z)^2} \neq 0.$$

Для завершения доказательства заметим, что конформность отображения точки $z = -\beta$ в точку $w = \infty$ следует из того, что функция $w_2 = \frac{1}{z}$ в точке $z = 0$ обладает свойством сохранения углов. (Углом в точке $w = \infty$ между двумя прямыми называется взятый с обратным знаком угол, под которым они пересекаются во второй точке пересечения.) Действительно, функция $w_2 = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\varphi}$, с геометрической точки зрения осуществляет композицию отображения инверсии $|w_2| = \frac{1}{|z|}$ (т.е. симметрии относительно единичной окружности) и симметрии относительно оси Ox (ибо $\arg w_2 = -\arg z$). При инверсии прямая, проходящая через центр окружности, отображается в себя. (Проверить). Поэтому, все прямые, пересекающиеся в $z = 0$ под углом θ , будут отображены в прямые, симметричные им относительно Ox , угол между ними в точке 0 станет $(-\theta)$, а в бесконечности он, соответственно, останется равен θ . А постоянство растяжения в $z = -\beta$ следует из того, что $z'(w)|_{\infty} = 0$. \square

5.3.2. Круговое свойство дробно-линейной функции

Опр. 5.4. Окружностями на комплексной плоскости \mathbb{C} мы будем называть **кривые**, координаты точек которых удовлетворяют уравнению

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad \text{при некоторых } A, B, C, D \in \mathbb{R} \quad |A| + |B| + |C| + |D| \neq 0.$$

Замечание 5.5. При таком определении под название "окружность" попадают, кроме всех настоящих окружностей (для которых $A \neq 0$), ещё и все прямые (для них $A = 0$, а $|B| + |C| \neq 0$). Принято прямые называть **окружностями бесконечного радиуса**.

Теорема 5.4 (Круговое свойство дробно-линейной функции).

Усл. $f(z) = w = \lambda \frac{\alpha + z}{\beta + z}$, где $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\lambda \neq 0, \alpha \neq \beta$).

Утв. Образом любой окружности на плоскости z при отображении $w = f(z)$ является окружность плоскости w .

Доказательство.

Поскольку дробно-линейная функция является композицией линейной функции $w_1(z) = z_0 + z_1z$ и функции $w_2(z) = \frac{1}{z}$, необходимо убедиться, что обе эти функции отображают окружности на плоскости z в окружности на плоскости w .

Линейная функция. При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются. Геометрически это означает, что функция z_1z растягивает всю плоскость в $|z_1|$ раз и поворачивает её на угол $\arg z_1$. Сумма же комплексного числа с комплексной константой z_0 геометрически есть параллельный перенос плоскости на радиус-вектор числа z_0 . Таким образом, линейная функция $w_1(z) = z_0 + z_1z$ осуществляет следующую композицию преобразований плоскости z : преобразование подобия (растяжение в $|z_1|$ раз) и преобразования (поворот и параллельный перенос), переводящие все фигуры в равные им. Поэтому и окружности на плоскости z перейдут в окружности.

Функция $w_2(z) = \frac{1}{z}$. Пусть действительная и мнимая части функции $w_2(z)$ равны $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Тогда

$$z = \frac{u - iv}{u^2 + v^2} \quad \Rightarrow \quad x(u, v) = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y(u, v) = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

Подставим это в уравнение окружности $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$, ($|A| + |B| + |C| + |D| \neq 0$).

$$A \left(\left(\frac{u}{u^2 + v^2} \right)^2 + \left(\frac{-v}{u^2 + v^2} \right)^2 \right) + B \frac{u}{u^2 + v^2} + C \frac{-v}{u^2 + v^2} + D = 0.$$

Отсюда, домножив на $u^2 + v^2$, получим:

$$D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A = 0, \quad (|A| + |B| + |C| + |D| \neq 0).$$

(Заметим, что окружности, проходящие через начало координат ($D = 0$), отображаются в прямые, а прямые ($A = 0$) – в окружности, проходящие через начало координат.) \square

Опр. 5.5. Точки z_1 и z_2 называются **симметричными относительно окружности** $|z - z_0| = R$, если

- 1) $|z_1 - z_0| \cdot |z_2 - z_0| = R^2$,
- 2) $\arg(z_1 - z_0) = \arg(z_2 - z_0)$.

Замечание 5.6. Геометрически это определение означает, что симметричные относительно окружности $|z - z_0| = R$ точки лежат на одном луче, выходящем из центра окружности. При этом, либо они совпадают и лежат на самой окружности, либо одна точка находится снаружи, другая внутри, и произведение расстояний от них до центра окружности равно квадрату её радиуса. Считается также, что центр окружности симметричен точке $z = \infty$.

Замечание 5.7. Симметрия относительно прямой (окружности бесконечного радиуса) определяется также, как в курсе средней школы.

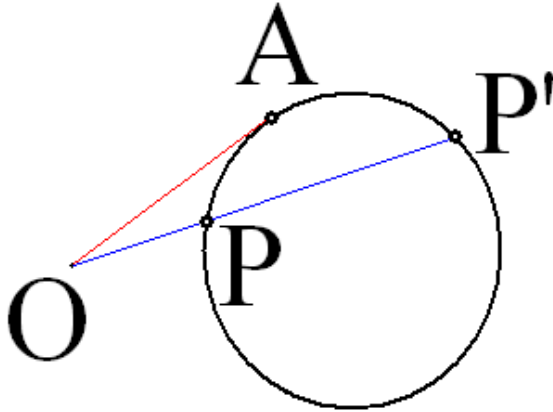
5.3.3. Леммы об окружностях

Для доказательства следующего свойства дробно-линейной функции нам потребуются теорема из школьного курса геометрии и две леммы.

Теорема 5.5 (Об отрезках секущей и касательной к окружности).

Усл. Из одной точки проведены касательная и секущая к одной окружности.

Утв. Квадрат отрезка касательной равен произведению отрезков секущей.



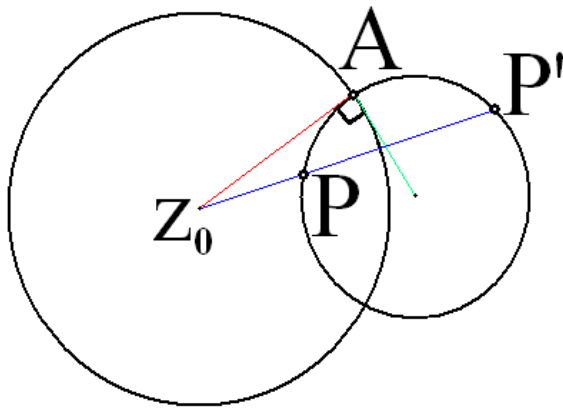
$$|OA|^2 = |OP| \cdot |OP'|$$

Лемма 5.1.

Усл. Точки P и P' симметричны относительно окружности $|z - z_0| = R$.

Утв. Любая окружность, проходящая через точки P и P' , ортогональна к окружности $|z - z_0| = R$ (то есть пересекается с ней под прямым углом).

Доказательство.



В самом деле, проведём любую окружность через точки P и P' , симметричны относительно окружности $|z - z_0| = R$. Проведём из точки z_0 касательную ко второй окружности и обозначим точку касания через A . По теореме 5.5 точек, выполнено равенство

$$|z_0 - A|^2 = |z_0 - P| \cdot |z_0 - P'|.$$

С другой стороны, по определению симметричных точек,

$$|z_0 - P| \cdot |z_0 - P'| = R^2.$$

Поэтому $|z_0 - A| = R$, то есть точка A лежит и на окружности $|z - z_0| = R$.

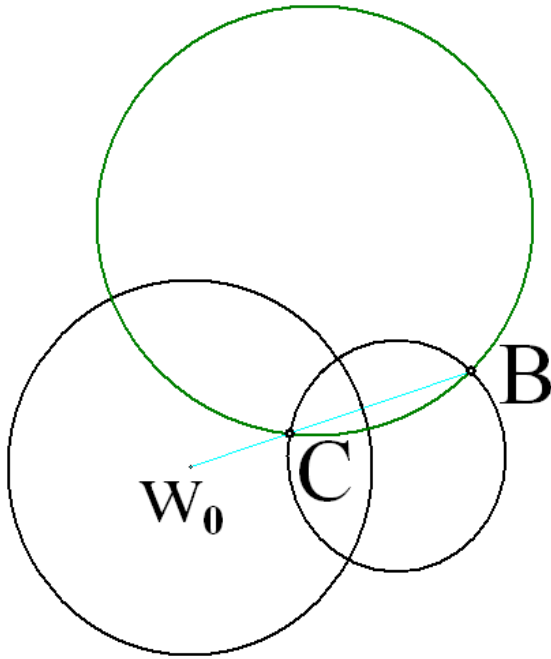
В силу этого, радиусы, проведённые в точку касания, перпендикулярны друг другу, следовательно, окружности пересекаются под прямым углом. □

Лемма 5.2.

Усл. Пара окружностей, ортогональных окружности $|w - w_0| = \tilde{R}$, пересекается в точках B и C .

Утв. Точки B и C симметричны относительно окружности $|w - w_0| = \tilde{R}$.

Доказательство.



В самом деле, возьмём пару окружностей, ортогональных данной к окружности $|w - w_0| = \tilde{R}$. Обозначим их точки пересечения через B и C . Проведём прямую из центра w_0 окружности в точку C . Она является секущей к обеим ортогональным окружностям. Пусть она пересекает одну окружность в точке B^* , а другую – в точке B^{**} . Тогда, по теореме 5.5 о касательной и секущей, верны равенства:

$$\tilde{R}^2 = |w_0 - C| \cdot |w_0 - B^*|$$

$$\tilde{R}^2 = |w_0 - C| \cdot |w_0 - B^{**}|.$$

Но точки B^* и B^{**} лежат на одном луче, следовательно, эти равенства могут иметь место только в случае, когда эти точки совпадают:

$$B^* = B^{**}.$$

Таким образом, пара ортогональных окружностей пересекается в точках C и $B = B^* = B^{**}$, и эти точки симметричны относительно исходной окружности $|w - w_0| = \tilde{R}$. \square

Замечание 5.8. Обе леммы доказаны для окружностей, понимаемых обычным образом. Для случая окружностей бесконечного радиуса, то есть прямых, эти леммы также верны, и их доказательство в этом случае очевидно.

5.3.4. Симметричное свойство и свойство о трёх точках

Теорема 5.6 (Симметричное свойство дробно-линейной функции).

Усл. $f(z) = w = \lambda \frac{\alpha + z}{\beta + z}$, где $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ($\lambda \neq 0, \alpha \neq \beta$).

Утв. Любая пара точек плоскости z , симметричных относительно какой-либо окружности, отобразится функцией $w = f(z)$ в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности.

Доказательство.

Проведём через пару симметричных относительно окружности $|z - z_0| = R$ точек P и P' две окружности. Обе они в силу леммы 5.1 ортогональны к окружности $|z - z_0| = R$. Поэтому их образы при дробно-линейном отображении будут

- 1) окружностями,
- 2) ортогональными к окружности $|w - w_0| = \tilde{R}$ (образу окружности $|z - z_0| = R$) в силу свойства сохранения углов при конформном отображении;
- 3) их точками пересечения будут точки $w(P)$ и $w(P')$ – образы точек P и P' .

Поскольку точки $w(P)$ и $w(P')$ лежат на пересечении окружностей, ортогональных окружности $|w - w_0| = \tilde{R}$ (образу окружности $|z - z_0| = R$), из леммы 5.2 следует, что $w(P)$ и $w(P')$ симметричны относительно окружности $|w - w_0| = \tilde{R}$. \square

Теорема 5.7 (Свойство о трёх точках).

Усл. z_1, z_2, z_3 – различные точки плоскости z . w_1, w_2, w_3 – различные точки плоскости w .

Утв. Существует функция вида $w = \frac{a+bz}{c+mz}$, ($\frac{a}{c} \neq \frac{b}{m}$, $|c| + |m| \neq 0$), осуществляющая отображение

$$z_1 \mapsto w_1, \quad z_2 \mapsto w_2, \quad z_3 \mapsto w_3.$$

Доказательство.

Без ограничения общности можно считать, что ни одна из точек $z_{1,2,3}$, $w_{1,2,3}$ не есть нуль, в противном случае линейной заменой $\zeta = z + p$ и/или $\psi = w + s$ мы можем этого добиться.

Поскольку для однозначного определения $w = \frac{a+bz}{c+mz}$ необходимо и достаточно найти числа a, b, c, m , то проверим, какие ограничения налагают на них заданные условия $z_1 \mapsto w_1, z_2 \mapsto w_2, z_3 \mapsto w_3$.

Имеем 3 уравнения

$$w_k = \frac{a + bz_k}{c + mz_k}, \quad k = 1, 2, 3 \quad \text{или} \quad cw_k + mw_k z_k = a + bz_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Поскольку мы ищем такую функцию, чтобы $|c| + |m| \neq 0$, поделим полученные уравнения на c и на m и получим две системы уравнений:

$$\frac{a}{c} - \frac{m}{c}w_k z_k + \frac{b}{c}z_k = w_k, \quad k = 1, 2, 3 \quad \text{либо} \quad \frac{a}{m} - \frac{c}{m}w_k + \frac{b}{m}z_k = w_k z_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Это – СЛАУ относительно неизвестных $x_1 = \frac{a}{c}, x_2 = \frac{m}{c}, x_3 = \frac{b}{c}$ в первом случае и относительно $x_1 = \frac{a}{m}, x_2 = \frac{c}{m}, x_3 = \frac{b}{m}$ во втором:

$$\begin{pmatrix} 1 & -w_1 z_1 & z_1 \\ 1 & -w_2 z_2 & z_2 \\ 1 & -w_3 z_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & -w_1 & z_1 \\ 1 & -w_2 & z_2 \\ 1 & -w_3 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 z_1 \\ w_2 z_2 \\ w_3 z_3 \end{pmatrix}$$

По меньшей мере одна из этих систем совместна. В самом деле, если, например, несовместна первая, то

$$\text{Rang} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -w_1 z_1 & z_1 & w_1 \\ 1 & -w_2 z_2 & z_2 & w_2 \\ 1 & -w_3 z_3 & z_3 & w_3 \end{array} \right) > \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & -w_1 z_1 & z_1 \\ 1 & -w_2 z_2 & z_2 \\ 1 & -w_3 z_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае, очевидно, совместна вторая:

$$\text{Rang} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -w_1 & z_1 & w_1 z_1 \\ 1 & -w_2 & z_2 & w_2 z_2 \\ 1 & -w_3 & z_3 & w_3 z_3 \end{array} \right) = \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & -w_1 & z_1 \\ 1 & -w_2 & z_2 \\ 1 & -w_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Аналогично, если несовместна вторая система, обязательно будет совместна первая.

Найдя решение совместной системы, мы находим (с точностью до постоянного множителя) числа a, b, c и m . Таким образом, мы нашли функцию $w = \frac{a+bz}{c+mz}$, осуществляющую требуемое отображение. \square

Замечание 5.9. Функция, существование которой утверждает теорема 5.7, также часто называется дробно-линейной. В самом деле, если $b \neq 0$ и $m \neq 0$, то $w = \frac{a+bz}{c+mz} = \frac{b}{m} \cdot \frac{\frac{a}{b} + z}{\frac{c}{m} + z}$. Обозначив через $\lambda = \frac{b}{m}$, через $\alpha = \frac{a}{b}$ и через $\beta = \frac{c}{m}$, мы получаем

$$w = \frac{a + bz}{c + mz} = \lambda \frac{\alpha + z}{\beta + z}.$$

Но если $m = 0$, а $c \neq 0$, то эта функция оказывается просто линейной: $w = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}z$, а в случае $m \neq 0$ и $b = 0$ она является обратной пропорциональностью: $w = \frac{a}{c+mz}$. Поэтому, строго говоря, множество функций, представимых в виде $w = \frac{a+bz}{c+mz}$ несколько шире, чем функций вида $\lambda \frac{\alpha+z}{\beta+z}$.

Замечание 5.10. Существуют аналоги теоремы 5.7, дающие различные условия для построения конформного отображения при помощи дробно-линейной функции. Например, известно, что для однозначного построения дробно-линейной функции, отображающей внутренность единичного круга на верхнюю полуплоскость достаточно задать

- либо отображения центра $z = 0$ круга $|z| < 1$ в произвольную точку верхней полуплоскости $\text{Im } w > 0$ и аргумента производной $\arg w'(0)$ в центре круга (см. пример 5.1 ниже);
- либо отображения любой пары точек, симметричных относительно круга $|z| < 1$, в пару точек, симметричных относительно оси $\text{Im } w = 0$, и отображения точки на окружности $|z| < 1$ в точку на прямой $\text{Im } w = 0$.

5.3.5. Отображения стандартных областей элементарными функциями

Знания о свойствах элементарных функций позволяет находить конформные отображения областей плоскости z на области плоскости w . Мы рассмотрим несколько примеров. Более подробное исследование на эту тему с большим количеством примеров есть в книге М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат "Методы теории функций комплексного переменного", глава II. и в книге А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов "Теория функций комплексного переменного", глава VI.

Пример 5.1. Найти конформное отображение верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$ на внутренность единичного круга $|w| < 1$ так, чтобы точка $z = i$ отобразилась в точку $w = 0$ и $\arg(w'(i)) = \frac{\pi}{2}$.

Границей исходной области является "окружность" (прямая $\text{Im } z = 0$), а границей её образа – окружность $|w| = 1$. Поэтому естественно искать функцию, осуществляющую данное конформное отображение среди дробно-линейных функций.

Итак, ищем функцию вида

$$w = \lambda \frac{\alpha + z}{\beta + z}.$$

Предварительные рассуждения. В силу симметричного свойства дробно-линейной функции (теорема 5.6, стр. 32), точка $-i$, симметричная точке i относительно "окружности" $\text{Im } z = 0$, отобразится в точку, симметричную относительно её образа – окружности $|w| = 1$, – точке 0. Точка 0 – центр окружности $|w| = 1$, поэтому симметричной ей будет точка $w = \infty$.

Постановка задачи. **Дано:** $\arg(w'(i)) = \frac{\pi}{2}$ и

z	\mapsto	w
i	\mapsto	0
$-i$	\mapsto	∞
$\text{Im } z = 0$	\mapsto	$ w = 1$

Найти: функцию вида $w = \lambda \frac{\alpha+z}{\beta+z}$.

Решение.

$$i \mapsto 0 \implies 0 = \lambda \frac{\alpha+i}{\beta+i} \implies \alpha = -i;$$

$$-i \mapsto \infty \implies \infty = \lambda \frac{\alpha-i}{\beta-i} \implies \beta = i.$$

Таким образом, искомая функция обязана иметь вид:

$$w = \lambda \frac{z-i}{z+i}.$$

Осталось найти λ . Для этого у нас осталось неиспользованное условие соответствия границ: $\text{Im } z = 0 \mapsto |w| = 1$. Воспользуемся им. Пусть $z = x + iy$, тогда на прямой $\text{Im } z = 0$ имеем $z = x$. Отсюда

$$1 = |w(x)| = |\lambda| \cdot \left| \frac{x-i}{x+i} \right| = |\lambda| \cdot \frac{|x-i|}{|x+i|} = |\lambda| \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = |\lambda|.$$

Итак, $|\lambda| = 1$.

Мы не нашли $\arg \lambda$ и не использовали условие $\arg(w'(i)) = \frac{\pi}{2}$. Найдём $w'(i)$:

$$w'(z) = \lambda \left(\frac{z-i}{z+i} \right)' = \lambda \left(1 - \frac{2i}{z+i} \right)' = \lambda \frac{2i}{(z+i)^2}.$$

Отсюда, $w'(i) = \lambda \frac{2i}{-4} = \lambda \frac{-i}{2}$. Следовательно,

$$\arg(w'(i)) = \arg(\lambda) + \arg\left(\frac{-i}{2}\right) = \arg(\lambda) - \frac{\pi}{2}.$$

Из условия $\arg(w'(i)) = \frac{\pi}{2}$ получаем: $\arg(\lambda) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\arg(\lambda) = \pi.$$

Единственное число, модуль которого равен 1, а аргумент π , это число (-1) . Таким образом, $\lambda = -1$.

Ответ: например, $w = -\frac{z-i}{z+i}$.

Пример 5.2. Найти конформное отображение плоскости z на плоскость w так, чтобы $-1 \mapsto i$, $\infty \mapsto 1$, $i \mapsto 1+i$.

Поскольку по теореме 5.7 (стр. 33) такое отображение осуществляет дробно-линейная функция, будем искать функцию вида

$$w = \lambda \frac{\alpha+z}{\beta+z}.$$

Дано: $-1 \mapsto i$, $\infty \mapsto 1$, $i \mapsto 1+i$.

Найти: функцию вида $w = \lambda \frac{\alpha+z}{\beta+z}$.

Решение.

$$-1 \mapsto i \implies i = \lambda \frac{\alpha-1}{\beta-1};$$

$$\infty \mapsto 1 \implies 1 = \lambda;$$

$$i \mapsto 1+i \implies 1+i = \lambda \frac{\alpha+i}{\beta+i}.$$

Полученное из второго уравнения $\lambda = 1$ подставим в первое и третье уравнения и перепишем их:

$$\begin{cases} \alpha - i\beta = 1 - i \\ \alpha - (1+i)\beta = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = 2 - i \\ \alpha = 1 - i + i\beta \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 2 + i \\ \beta = 2 - i \end{cases}$$

Таким образом, искомая функция имеет вид:

$$w = \frac{2+i+z}{2-i+z}.$$

Пример 5.3 (Общее отображение трёх пар точек).

Найти конформное отображение плоскости z на плоскость w так, чтобы $z_1 \mapsto w_1$, $z_2 \mapsto w_2$, $z_3 \mapsto w_3$.

Шаг 1. Поскольку проще всего вычислять коэффициенты дробно-линейной функции, если какие-либо из точек равны 0 и ∞ , рассмотрим вспомогательные отображения z и w на ζ так, чтобы $z_1 \mapsto 0$, $z_2 \mapsto 1$, $z_3 \mapsto \infty$ и $w_1 \mapsto 0$, $w_2 \mapsto 1$, $w_3 \mapsto \infty$

$$\begin{aligned} z_1 \mapsto 0 &\implies 0 = \lambda \frac{\alpha + z_1}{\beta + z_1}; \\ z_2 \mapsto 1 &\implies 1 = \lambda \frac{\alpha + z_2}{\beta + z_2}; \\ z_3 \mapsto \infty &\implies \infty = \lambda \frac{\alpha + z_3}{\beta + z_3}. \end{aligned}$$

Из первого уравнения $\alpha = -z_1$, а из третьего $\beta = -z_3$. Подставим во второе:

$$1 = \lambda \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \implies \lambda = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}.$$

Таким образом,

$$\zeta = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}.$$

Аналогично,

$$\zeta = \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \cdot \frac{w - w_1}{w - w_3}.$$

Шаг 2. Выразив w , получим:

$$w = \frac{\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} w_1 - w_3 \zeta}{\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} - \zeta}.$$

Подставляя сюда выражение для ζ через z , получаем ответ:

$$w = \frac{\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} w_1 - w_3 \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}}{\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} - \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}}.$$

Однако, на практике проще пользоваться промежуточной формулой:

$$\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \cdot \frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}. \quad (5.1)$$

Пример 5.4. Найти конформное отображение полосы $\operatorname{Re} z \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ плоскости z на единичный круг $|w| < 1$ так, чтобы $\frac{\pi}{4} \mapsto 1$, $-\frac{\pi}{4} \mapsto -1$, $i\infty \mapsto i$. (Под $i\infty$ понимается верхняя бесконечно удалённая точка полосы.)

Тут не удастся обойтись одной дробно-линейной функцией, поскольку полосу она отобразит в пересечение двух кругов.

Шаг 1. Поворот и растяжение в два раза.

$$\eta = 2iz.$$

Эта операция переведёт исходную полосу в полосу $\operatorname{Im} \eta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а точки $z = \pm\frac{\pi}{4}$, $i\infty$ в точки $\eta = \pm\frac{i\pi}{2}$, $-\infty$, соответственно. Это подготовило почву для следующего шага.

Шаг 2. Экспонента. Поскольку функция $\zeta = e^\eta$ отображает прямые $\eta = x \pm i\frac{\pi}{2}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ в лучи $\zeta = e^{x \pm i\frac{\pi}{2}} = e^x (\cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2}) = \pm i e^x$, а внутреннюю точку $\eta = 0$ полосы $\operatorname{Im} \eta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ в $\zeta(0) = e^0 = 1$, то из принципа соответствия границ при конформном отображении следует, что внутренность полосы плоскости η перейдёт в правую полуплоскость

плоскости ζ . Итак, мы отобразили исходную полосу на $\operatorname{Re} \zeta > 0$. При этом точки $\eta = \pm \frac{i\pi}{2}$, $-\infty$ перешли в $\zeta = \pm i$, 0 , соответственно.

Шаг 3. Дробно-линейная функция.

Дано:

ζ	\mapsto	w
i	\mapsto	1
$-i$	\mapsto	-1
0	\mapsto	i
$\operatorname{Re} \zeta = 0$	\mapsto	$ w = 1$

Найти: функцию вида $w = \lambda \frac{\alpha + \zeta}{\beta + \zeta}$.

Решение. Нам задано соответствие трёх пар точек. Этого должно быть достаточно, чтобы найти дробно-линейное отображение. Но ещё требуется, чтобы прямая $\operatorname{Re} \zeta = 0$ перешла в окружность $|w| = 1$. В данном случае, не смотря на кажущийся избыток требований, дробно-линейную функцию найти можно, потому что все три исходные точки лежат на прямой $\operatorname{Re} \zeta = 0$, а их образы на окружности $|w| = 1$. Ведь три различные точки единственным образом определяют окружность, поэтому построив дробно-линейную функцию, отображающую эти точки, мы получим, что окружность, которой они принадлежат, перейдёт в окружность, на которой лежат их образы. А это именно то, чего от нас требует условие $\operatorname{Re} \zeta = 0 \mapsto |w| = 1$.

По общей формуле трёхточечного отображения (5.1), стр. 36,

$$\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \cdot \frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{\zeta_2 - \zeta_3}{\zeta_2 - \zeta_1} \cdot \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_3}$$

$$\frac{-1 - i}{-1 - 1} \cdot \frac{w - 1}{w - i} = \frac{-i - 0}{-i - i} \cdot \frac{\zeta - i}{\zeta - 0}.$$

Упростим:

$$(1 + i) \cdot \frac{w - 1}{w - i} = 1 - \frac{i}{\zeta} \implies (1 + i)(w - 1)\zeta = (w - i)(\zeta - i).$$

Отсюда:

$$w = \frac{\zeta + 1}{i\zeta + i}$$

и, наконец,

$$w = -i \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}.$$

Осталось вспомнить, что $\zeta = e^\eta = e^{2iz}$ и подставить вместо ζ в полевную формулу.

Ответ: $w = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}} = \operatorname{tg} z.$

Пример 5.5 (Отображение двуугольника в угол).

Опр. 5.6. Двуугольником (лункой) с вершинами z_1 и z_2 называется фигура, образованная пересечением двух кругов, границы которых пересекаются в точках z_1 и z_2 .

Найти конформное отображение двуугольника с вершинами z_1 и z_2 на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$.

Шаг 1. Отображение двуугольника в угол.

Пусть угол при вершине двуугольника равен $\gamma \in (0, \pi)$. Пусть также нам известна точка z_3 , лежащая на одной из сторон двуугольника, и точка z_4 , лежащая на другой его стороне. Найдём дробно-линейную функцию $\zeta = \lambda \frac{\alpha + z}{\beta + z}$, отображающую

$$z_1 \mapsto 0, \quad z_2 \mapsto \infty, \quad z_3 \mapsto 1.$$

$$z_1 \mapsto 0 \implies \alpha = -z_1;$$

Дробно-линейная функция

$$\begin{aligned} z_2 \mapsto \infty &\implies \beta = -z_2; \\ z_3 \mapsto 1 &\implies 1 = \lambda \frac{\alpha + z_3}{\beta + z_3}. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\zeta = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

При этом мы получим, что двуугольник отобразился в угол с вершиной в точке 0, одна сторона которого лежит на положительной действительной полуоси. Величина этого угла, в силу конформности отображения, равна γ . Единственное, чего мы ещё про него не знаем, это лежит его вторая сторона в верхней или нижней полуплоскости. Это проверяется при помощи z_4 . Если $\text{Im } \zeta(z_4) > 0$, то она (и весь угол) в верхней полуплоскости плоскости ζ , если нет, то в нижней.

Шаг 2. Отображение угла на полуплоскость.

Если угол попал в верхнюю полуплоскость, развернём его на всю полуплоскость возведением в степень:

$$w = \zeta^{\frac{\pi}{\gamma}} = \left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

Если же угол попал в нижнюю полуплоскость, то сначала умножим на (-1) , а потом развернём:

$$w = (-\zeta)^{\frac{\pi}{\gamma}} = \left(- \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_2} \right)^{\frac{\pi}{\gamma}}.$$

Если дробь $\frac{\pi}{\gamma}$ не равна целому числу, то функция возведения в степень бесконечнозначна. Для конформного отображения нам нужно будет взять любую однозначную ветвь этой функции.

Пример 5.6. Найти конформное отображение полукруга $|z| < 1$, $\text{Im } z > 0$ на верхнюю полуплоскость $\text{Im } w > 0$.

Шаг 1. Отображение двуугольника в угол.

Данный полукруг – это двуугольник с вершинами $z_1 = -1$ и $z_2 = 1$, на одной его стороне (диаметре) лежит точка $z_3 = 0$, а на другой (полуокружности) – точка $z_4 = i$. Найдём дробно-линейную функцию $\zeta = \lambda \frac{\alpha + z}{\beta + z}$, отображающую

$$-1 \mapsto 0, \quad 1 \mapsto \infty, \quad 0 \mapsto 1.$$

$$-1 \mapsto 0 \implies \alpha = 1;$$

$$1 \mapsto \infty \implies \beta = -1;$$

$$0 \mapsto 1 \implies 1 = \lambda \frac{\alpha + 0}{\beta + 0}.$$

Отсюда:

$$\zeta = - \frac{z + 1}{z - 1}.$$

При этом мы получим, что исходный двуугольник отобразился в угол с вершиной в точке 0, одна сторона которого лежит на положительной действительной полуоси. Величина этого угла, в силу конформности отображения, равна $\frac{\pi}{2}$. Единственное, чего мы ещё про него не знаем, это лежит его вторая сторона в верхней или нижней полуплоскости. Проверим это при помощи $z_4 = i$. Поскольку

$$\zeta(z_4) = - \frac{i + 1}{i - 1} = \frac{2i}{2} = i, \quad \text{Im } i = 1 > 0,$$

вторая сторона полученного угла есть верхняя мнимая полуось, и весь угол лежит в верхней полуплоскости плоскости ζ , в первой четверти.

Шаг 2. Отображение угла на полуплоскость.

Развернём угол на всю верхнюю полуплоскость возведением в квадрат:

$$w = \zeta^2 = \left(-\frac{z+1}{z-1} \right)^2 = \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}.$$

Полученная функция $w(z) = \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}$ однозначна, однолистка (в данной области, но не всюду на \mathbb{C}). Она осуществляет требуемое конформное отображение.

6. Интеграл функции комплексного переменного

6.1. Понятие и свойства интеграла функции комплексного переменного

Опр. 6.1. Интегралом от функции $f(z)$ вдоль кривой C называется число, равное:

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(\xi_k)(z_{k+1} - z_k),$$

где $z_0 = a, z_1, z_2, \dots, z_{n+1} = b$ – последовательные точки, разбивающие C на n участков, через a и b обозначены концы C , ξ_k – произвольная точка, лежащая на участке от z_k до z_{k+1} кривой C , а предел берётся в предположении, что $\max |z_{k+1} - z_k| \rightarrow 0$.

Пусть $z = x + iy, \xi_k = x_k^* + iy_k^*, \Delta z = \Delta x + i\Delta y$, а $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогда интегральная сумма $S(z_k, \xi_k) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k$ интеграла $\int_C f(z)dz$ запишется в виде:

$$\begin{aligned} S(z_k, \xi_k) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^n (u(x_k^*, y_k^*) + iv(x_k^*, y_k^*)) \cdot (\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n (u(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k - v(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k) + i \sum_{k=1}^n (v(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k + u(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k). \end{aligned}$$

Но суммы, стоящие в правой части этого равенства, представляют собой интегральные суммы криволинейных интегралов $\int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy$ и $\int_C v(x, y)dx + u(x, y)dy$. Поэтому, если существуют данные криволинейные интегралы, то существует и интеграл $\int_C f(z)dz$, причём выполнено равенство:

$$\int_C f(z)dz = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy. \quad (6.1)$$

Эта формула позволяет

свести вычисление интеграла от функции комплексного переменного к криволинейному интегралу II-го рода функций двух действительных переменных.

Из курса анализа известно, что если C – кусочно гладкая кривая, а $f(z)$ (и, следовательно, функции u и v) – кусочно-непрерывная ограниченная функция, то интегралы $\int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy$ и $\int_C v(x, y)dx + u(x, y)dy$ (и, следовательно, интеграл $\int_C f(z)dz$) существуют.

Для вычисления этих интегралов на практике удобно пользоваться обычным приёмом для вычисления криволинейных интегралов – параметризацией контура и сведением криволинейного интеграла к обычному интегралу Римана.

Рассмотрим $\int_C f(z)dz = \int_C (u+iv)d(x+iy) = \int_C udx - vdy + i \int_C vdx + udy$. Если $x = x(t)$, $y = y(t)$ – параметризация контура C , причём $(x(\alpha), y(\alpha))$ – начало, а $(x(\beta), y(\beta))$ – конец кривой C , то

$$\int_C f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} (ux' - vy')dt + i \int_{\alpha}^{\beta} (uy' + vx')dt \equiv \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt. \quad (6.2)$$

Действительно, $f(z(t))z'(t) = (u+iv)(x'+iy') = (ux' - vy') + i(vx' + uy')$

Поскольку имеет место такая связь интеграла от функции комплексного переменного с криволинейным интегралом II-го рода функций двух действительных переменных, то все свойства интегралов распространяются и на случай интеграла от функции комплексного переменного:

Теорема 6.1 (Свойства интеграла).

$$\int_C (c_1 f(z) + c_2 g(z))dz = c_1 \int_C f(z)dz + c_2 \int_C g(z)dz; \quad \int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz;$$

$$\int_C f(z)dz = - \int_{C^-} f(z)dz, \quad \left| \int_C f(z)dz \right| \leq \int_C |f(z)dz|,$$

где $c_{1,2} \in \mathbb{C}$, $C_1 + C_2$ – контур, являющийся объединением C_1 и C_2 (не имеющих общих внутренних точек), а C^- – кривая, совпадающая с C , но проходимая в противоположном направлении.

6.2. Интегральная теорема Коши

6.2.1. Интегральная теорема Коши для односвязной области

Теорема 6.2.

Усл. $f(z)$ аналитична в односвязной области D , C - произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в D .

Утв.

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Доказательство. Сведём вычисление интеграла от функции комплексного переменного к криволинейному интегралу II-го рода функций двух действительных переменных:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i \oint_C vdx + udy.$$

Из курса III-го семестра известна формула Грина: пусть контур C есть граница области G , а функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в G , тогда:

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Применим к нашим интегралам эту формулу:

$$\oint_C u dx - v dy = \iint_G \left(\frac{-\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \left[\text{в силу условий Коши-Римана} \right] = \iint_G 0 dx dy = 0.$$

$$\oint_C v dx + u dy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \left[\text{в силу условий Коши-Римана} \right] = \iint_G 0 dx dy = 0.$$

Таким образом, $\oint_C f(z) dz = \oint_C u dx - v dy + i \oint_C v dx + u dy = 0 + i \cdot 0 = 0$. □

Следствие 6.1.

Усл. $f(z)$ аналитична в односвязной области D .

Утв. $\forall C_1, C_2$, целиком лежащих в D и имеющих общие начало и конец,

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

(т.е. значение интеграла не зависит от пути интегрирования)

Доказательство. 1) Пусть контуры C_1 и C_2 не имеют общих точек, кроме начала и конца. Тогда они образуют один замкнутый контур $C = C_1 + C_2^-$, если мы начнём обход вдоль контура C_1 до его конца, а затем от конца контура C_2 – к его началу. По теореме Коши $\int_C f(z) dz = 0$.

Но по свойству аддитивности интеграла, $\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2^-} f(z) dz = 0$. Таким образом,

$$\int_{C_1} f(z) dz = - \int_{C_2^-} f(z) dz. \text{ Но по свойству интеграла, } - \int_{C_2^-} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz, \text{ следовательно,}$$

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz.$$

2) Если же контуры C_1 и C_2 имеют общие точки, то контур $C = C_1 + C_2^-$ есть объединение нескольких замкнутых контуров, для каждого из которых можно провести рассуждения доказательства пункта 1). □

Пример 6.1. Теорема Коши даёт простейший способ вычисления некоторых интегралов. Например,

$$\oint_C (e^z + \sin^n z) dz = 0 \quad \forall C - \text{замкнутого контура в } \mathbb{C}.$$

6.2.2. Интегральная теорема Коши для многосвязной области

Теорема 6.3.

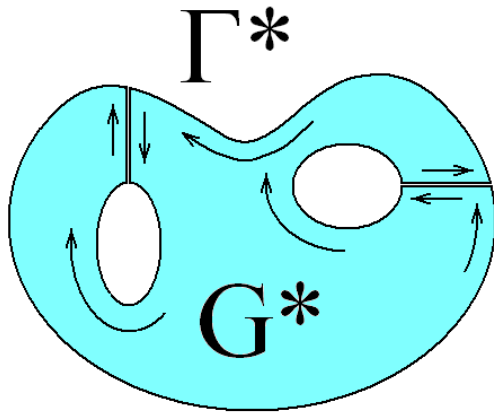
Усл. $f(z)$ аналитична в многосвязной области D , целиком содержащей многосвязную область $G \subset D$, $\Gamma = \partial G$ – кусочно-гладкая граница G .

Утв.

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0,$$

где контур Γ проходится так, чтобы область G оставалась слева.

Доказательство.



Соединим отдельные куски границы Γ области G отрезками, лежащими в G , и назовём полученный контур, состоящий из кусков Γ и добавленных отрезков, контуром Γ^* . Он является замкнутым и ограничивает односвязную область G^* , совпадающей с областью G , разрезанной добавленными отрезками. При этом контур Γ^* целиком лежит в области аналитичности функции $f(z)$, следовательно, по теореме Коши для односвязной области, $\int_{\Gamma^*} f(z)dz = 0$.

Но по свойству аддитивности интеграла, $\int_{\Gamma^*} f(z)dz = \int_{\Gamma} f(z)dz + \text{сумма интегралов по добавленным отрезкам}$, причём каждый отрезок проходится сначала в одном направлении, затем в противоположном. Поэтому сумма интегралов по добавленным отрезкам равна нулю, и мы получаем, что $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$. \square

6.3. Первообразная

Опр. 6.2. Аналитическая функция $F(z)$ называется **первообразной аналитической функции $f(z)$ в области D** , если всюду в D выполнено равенство $F'(z) = f(z)$.

Опр. 6.3. **Неопределённым интегралом от аналитической функции $f(z)$ в области D** называется множество всех её первообразных.

Теорема 6.4.

Усл. $f(z)$ непрерывна в области D . Интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру, лежащему в D , равен 0.

Утв. Функция $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta$ является

- 1) аналитической в D ,
- 2) первообразной для $f(z)$ в D .

Доказательство.

Шаг 1 Составим разностное отношение:

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left(\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta)d\zeta \right) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta.$$

Последнее равенство имеет место в силу независимости значения интеграла $\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)d\zeta$ от пути интегрирования и второго свойства из теоремы 6.1, стр. 40.

Шаг 2) Выберем в качестве пути интегрирования в последнем интеграле отрезок, соединяющий точки z и $z + \Delta z$. Это удобно, поскольку в этом случае легко проверить соотношения

$\int_z^{z+\Delta z} d\zeta = \Delta z$ и $\int_z^{z+\Delta z} |d\zeta| = |\Delta z|$. Действительно, параметризуем отрезок от z до $z + \Delta z$: $\zeta = z + \alpha\Delta z$, $\alpha \in (0, 1)$, тогда

$$\int_z^{z+\Delta z} d\zeta = \left[\begin{array}{l} \zeta = z + \alpha\Delta z, \quad \alpha \in (0, 1) \\ d\zeta = \Delta z d\alpha \end{array} \right] = \int_0^1 \Delta z d\alpha = \Delta z \int_0^1 d\alpha = \Delta z,$$

$$\int_z^{z+\Delta z} |d\zeta| = \left[\begin{array}{l} \zeta = z + \alpha\Delta z, \quad \alpha \in (0, 1) \\ d\zeta = \Delta z d\alpha \end{array} \right] = \int_0^1 |\Delta z| d\alpha = |\Delta z| \int_0^1 d\alpha = |\Delta z|.$$

Шаг 3) Оценим разность:

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|} \max_{\zeta \in [z, z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)| \cdot |\Delta z| = \max_{\zeta \in [z, z+\Delta z]} |f(\zeta) - f(z)|.$$

В силу непрерывности $f(z)$ в точке z , $\lim_{\zeta \rightarrow z} f(\zeta) = f(z)$, откуда

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} |f(\zeta) - f(z)| = 0.$$

Таким образом, существует

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} \left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = 0, \quad \text{или}$$

$$\exists F'(z) \equiv \lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z).$$

Убедившись в наличии у $F(z)$ производной в произвольной точке $z \in D$, мы автоматически доказали аналитичность $F(z)$ в D . \square

6.4. Интегральная формула Коши

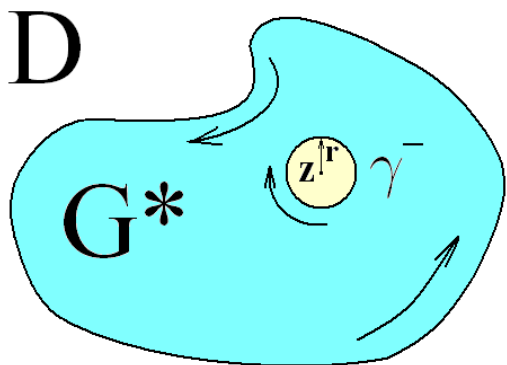
Теорема 6.5 (Интегральная формула Коши).

Усл. $f(z)$ аналитична в области D . Область $G \subsetneq D$ имеет границу $\partial G = C$.

Утв. Для произвольной точки $z \in G$ имеет место равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

Доказательство.



Выбросим из области G кружок радиуса r с центром в точке z . Если область G была n -связной, то полученная после выкидывания круга область G^* будет $(n + 1)$ -связной. При этом в области G^* подынтегральная функция аналитична, т.к. числитель и знаменатель – аналитичны в G^* , и знаменатель $\zeta - z$ не обращается в ноль в G^* . Поэтому, по теореме Коши для многосвязной области,

$$\oint_{\partial G^*} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = 0.$$

Теперь заметим, что

$$\int_{\partial G^*} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \oint_{\gamma^-} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

где γ^- – окружность вокруг точки z , проходимая по часовой стрелке.

Так как $\oint_{\gamma^-} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = - \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$, то

$$\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = 0,$$

откуда

$$\int_{\partial G} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \tag{6.3}$$

где γ – окружность вокруг точки z , проходимая уже против часовой стрелки.

Параметризуем окружность γ :

для каждой точки $\zeta \in \gamma$ верно представление $\zeta = z + re^{i\varphi}$, откуда

$$d\zeta = ire^{i\varphi}d\varphi, \quad \zeta - z = re^{i\varphi}.$$

Тогда

$$\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{i\varphi}) \cdot ire^{i\varphi}d\varphi}{re^{i\varphi}} = i \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi})d\varphi. \tag{6.4}$$

Принципиально важным моментом здесь является то, что мы вывели формулу (6.3) для произвольного радиуса r (достаточно малого, чтобы контур γ не пересекался с границей области G). Поэтому можно перейти в (6.3) к пределу при $r \rightarrow +0$. При этом левая часть (6.3) не зависит от r , следовательно, не изменится:

$$\oint_{\partial G} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{r \rightarrow +0} i \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi})d\varphi \tag{6.5}$$

В правой части, в силу дифференцируемости функции $f(z)$ имеем:

$$f(z + re^{i\varphi}) = f(z) + f'(z) [(z + re^{i\varphi}) - z] + \bar{o} [(z + re^{i\varphi}) - z] = f(z) + f'(z)re^{i\varphi} + \bar{o}(r), \quad r \rightarrow 0.$$

Таким образом, интеграл в правой части (6.5) ведёт себя следующим образом:

$$i \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi = i \int_0^{2\pi} f(z) d\varphi + i \int_0^{2\pi} f'(z) r e^{i\varphi} d\varphi + i \int_0^{2\pi} \bar{\partial}(r) d\varphi.$$

Так как величины $f(z)$, $f'(z)$ и r не зависят от φ , то их можно вынести за знаки интегралов:

$$i \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi = i f(z) \int_0^{2\pi} d\varphi + i r f'(z) \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi + i \bar{\partial}(r) \int_0^{2\pi} d\varphi, \quad r \rightarrow 0.$$

Устремив $r \rightarrow +0$, получим, что два последних слагаемых стремятся к нулю, а первое, не зависящее от r , есть некоторое число:

$$\lim_{r \rightarrow +0} i \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi = i f(z) \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Возьмём интеграл в правой части: $\int_0^{2\pi} d\varphi = \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi$ и окончательно получим:

$$\lim_{r \rightarrow +0} i \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi i f(z).$$

Из (6.5) и последней формулы получаем:

$$\oint_{\partial G} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i f(z).$$

□

Замечание 6.1. Доказанная теорема даёт ещё одно неожиданное свойство аналитических функций: достаточно знать значения аналитической функции на некотором замкнутом контуре, чтобы по ним найти её значения во всех точках внутри этого контура. Это в очередной раз подчёркивает, насколько сильным является условие аналитичности, – если функция задана на границе некоторой области мы не можем её продолжить внутрь области так, как захотим, поскольку её значения внутри области уже определены однозначно.

В то же время непрерывные, и даже n раз непрерывно дифференцируемые функции двух действительных переменных можно продолжать их внутрь области бесконечным числом различных способов с сохранением их гладкости.

Утверждение 6.1 (Аналитичность интеграла, зависящего от параметра).

Усл. $\varphi(z, \zeta)$ аналитична по z в односвязной области D и ограничена. При этом $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \in C(D \times C)$. Взаимное расположение D и C совершенно произвольно.

Утв. Функция $F(z) = \int_C \varphi(z, \zeta) d\zeta$ аналитична в D , и

$$F'(z) = \int_C \frac{\partial \varphi(z, \zeta)}{\partial z} d\zeta.$$

Доказательство. Пусть $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, а $\varphi(z, \zeta) = u(x, y; \xi, \eta) + iv(x, y; \xi, \eta)$. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$U(x, y) = \int_C u(x, y; \xi, \eta)d\xi - v(x, y; \xi, \eta)d\eta.$$

Из аналитичности $\varphi(z, \zeta)$ по z следует, что производные u и v по x и y , u_x , u_y , v_x , v_y непрерывны в $D \times C^1$. При таких условиях существуют частные производные $U_x(x, y)$ по x и y , и их можно найти дифференцированием под знаком интеграла (см. Теорему 9.3, стр. 270, Ильин В.А., Позняк Э.Г. "Основы математического анализа. Часть II", М., 2000г. и формулу (6.2), стр. 40, о сведении интегралов функций комплексного переменного к вычислению интегралов Римана).

$$U_x(x, y) = \int_C u_x(x, y; \xi, \eta)d\xi - v_x(x, y; \xi, \eta)d\eta,$$

$$U_y(x, y) = \int_C u_y(x, y; \xi, \eta)d\xi - v_y(x, y; \xi, \eta)d\eta.$$

При этом, так как подинтегральные функции непрерывны, то и (см. Теорему 9.1, стр. 269, там же) найденные U_x и U_y также непрерывны. Пользуясь аналогичными свойствами функции

$$V(x, y) = \int_C v(x, y; \xi, \eta)d\xi + u(x, y; \xi, \eta)d\eta,$$

и условиями Коши – Римана, получим:

$$V_y(x, y) = \int_C v_y(x, y; \xi, \eta)d\xi + u_y(x, y; \xi, \eta)d\eta = \int_C u_x(x, y; \xi, \eta)d\xi - v_x(x, y; \xi, \eta)d\eta = U_x(x, y),$$

$$V_x(x, y) = \int_C v_x(x, y; \xi, \eta)d\xi + u_x(x, y; \xi, \eta)d\eta = \int_C (-u_y(x, y; \xi, \eta))d\xi + v_y(x, y; \xi, \eta)d\eta = -U_y(x, y).$$

Таким образом, для действительной и мнимой частей функции $F(z) = U + iV$ также выполнены условия Коши – Римана, следовательно, $F(z)$ аналитична в D .

При этом

$$F'(z) = U_x(x, y) + iV_x(x, y) = \int_C u_x d\xi - v_x d\eta + i \int_C v_x d\xi + u_x d\eta = \int_C (u_x + iv_x)(d\xi + id\eta) \equiv \int_C \frac{\partial \varphi(z, \zeta)}{\partial z} d\zeta.$$

□

Теорема 6.6 (Производные всех порядков у аналитической функции).

Усл. $f(z)$ аналитична в области D . Область $G \subsetneq D$ имеет границу $\partial G = C$.

Утв. При любом $n \in \mathbb{N}$ функция $f^{(n)}(z)$ аналитична в G . Для произвольной точки $z \in G$ имеет место равенство

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $z_0 \in G$. Рассмотрим область G_0 , такую, чтобы $\overline{G_0} \subset G$ и $z_0 \in G_0$. Тогда интеграл $\oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$ является собственным при всех $z \in G_0$, а его подинтегральная функция $\varphi(z, \zeta) = \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$ аналитична по z в G_0 , ограничена и непрерывна вместе с $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ по совокупности переменных в $G_0 \times C$. Поэтому мы можем применить утверждение 6.1. Она гарантирует нам, что функция, стоящая в правой части (6.6) аналитична в G_0

¹ $D \times C = \{(z, \zeta) : z \in D, \zeta \in C\}$ – декартово произведение области D на контур C

и, в частности, в точке z_0 , и её производную можно найти формальным дифференцированием под знаком интеграла. Поскольку точку $z_0 \in G$ мы выбирали произвольно, то вывод об аналитичности правой части (6.6) и о дифференцировании её под знаком интеграла можно распространить на всю область G .

При $n = 0$ формула (6.6) совпадает с интегральной формулой Коши (теорема 6.5, стр. 43), значит она не требует проверки. При произвольном $n > 0$ формула (6.6) получается формальным дифференцированием интегральной формулы Коши n раз. Например, раз $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$, то

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^2},$$

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^3}$$

и так далее. □

6.5. Интеграл типа Коши

Опр. 6.4. Пусть C – произвольный кусочно-гладкий контур, не обязательно замкнутый, функция $f(z)$ непрерывна на C , и пусть точка $z \notin C$. Тогда выражение

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

называется **интегралом типа Коши**.

Отличие от интегральной формулы Коши здесь в том, что контур C – не обязательно замкнутый, а функция $f(z)$ только непрерывна на C и не обязана быть аналитической на C . Тем не менее при таких условиях тоже можно многое сказать о свойствах $F(z)$.

Теорема 6.7.

Усл. C – произвольный кусочно-гладкий контур, не обязательно замкнутый, функция $f(z)$ непрерывна на C , и функция $F(z)$ при $z \notin C$ определена формулой

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \notin C.$$

Утв.

- 1) Функция $F(z)$ аналитична в любой области, не содержащей точек контура C ;
- 2) производные функции $F(z)$ определяются формулами

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad z \notin C, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

- 3) $F(\infty) = 0$, причём $F(z) = \underline{O}\left(\frac{1}{z}\right)$, $z \rightarrow \infty$.

6.6. Теорема Лиувилля

Теорема 6.8.

Усл. $f(z)$ аналитична всюду в \mathbb{C} и ограничена, т.е. $\exists M > 0 : \forall z \in \mathbb{C} \quad |f(z)| \leq M$.

Утв. $f(z) = \text{const}$ всюду в \mathbb{C} .

Доказательство. Поскольку $f(z)$ аналитична в \mathbb{C} , для каждой точки $z \in \mathbb{C}$ и окружности C радиуса R с центром в этой точке, верна интегральная формула Коши

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Оценим $|f'(z)|$.

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{M}{R^2} |d\zeta| = \\ &= \frac{M}{2\pi R^2} \int_0^{2\pi} R |e^{i\varphi}| d\varphi = \left[|e^{i\varphi}| = 1 \right] = \frac{M}{2\pi R^2} \cdot R \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{2\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R}. \end{aligned}$$

Итак, в каждой фиксированной точке z выполнено неравенство $|f'(z)| \leq \frac{M}{R}$ при любом $R > 0$. Устремим $R \rightarrow +\infty$. Так как левая часть не зависит от R , она не изменится, а правая стремится к нулю. Следовательно, в каждой точке $z \in \mathbb{C}$ выполнено равенство $|f'(z)| = 0$, откуда $f(z) = \text{const}$ всюду в \mathbb{C} . \square

6.7. Теорема Морера

Теорема 6.9.

Усл. $f(z)$ непрерывна в области D . Интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру, лежащему в D , равен 0.

Утв. $f(z)$ аналитична в D .

Доказательство. В силу теоремы 6.4 (стр. 42) при произвольных $z, z_0 \in D$ функция $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$ аналитична в D , причём $F'(z) = f(z)$. (Интеграл берётся вдоль любого контура, целиком лежащего в D .) Теорема 6.6 (стр. 46) утверждает, что производная аналитической функции также является аналитической функцией, поэтому $f(z) = F'(z)$ аналитична в D . \square

6.8. Теорема о среднем и принцип максимума модуля

Теорема 6.10.

Усл. $f(z)$ аналитична в области D . Круг с центром в точке z целиком содержится в D .

Утв. Значение $f(z)$ в центре круга равно средней величине значений на окружности:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Доказательство. Из интегральной формулы Коши (теорема 6.5, (стр. 43) следует

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где $\gamma = \{\zeta : \zeta = z + re^{i\varphi}\}$ – окружность с центром в z радиуса r . Тогда на окружности имеем $d\zeta = ire^{i\varphi} d\varphi$, и формула переписывается в виде:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{i\varphi}) \cdot ire^{i\varphi} d\varphi}{re^{i\varphi}} = \frac{i}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

□

Теорема 6.11.

Усл. $f(z) \neq \text{const}$ аналитична в области D и непрерывна в \bar{D} .

Утв. $|f(z)|$ не может достигать максимального значения во внутренней точке D .

Доказательство. Предположим противное: максимум модуля $\max_{z \in \bar{D}} |f(z)| = M$ достигается внутри D . Обозначим через S множество всех точек D , в которых $|f(z)| = M$. Возможны два варианта:

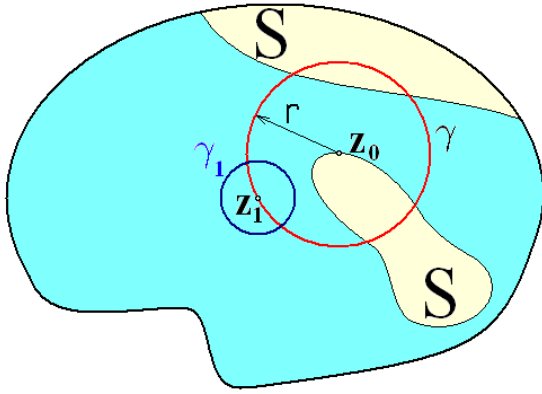
- 1) $S = D$, либо
- 2) найдётся точка $z_0 \in D$, граничная для S (то есть в любой её окрестности есть как точки из S , так и точки не из S).

Убедимся, что оба случая приводят нас к противоречию.

- 1) Если $S = D$, то $|f(z)| = M$ всюду в D , откуда, в силу непрерывности $f(z)$ следует, что $f(z) = \text{const}$ в D . Но это противоречит условию теоремы, значит, этот случай невозможен.

- 2) Пусть $\exists z_0 \in D \cap \partial S : |f(z_0)| = M.$

Ряд Тейлора



Проведём окружность γ с центром в z_0 радиуса r , достаточно малого, чтобы γ целиком лежала в D , и такую, чтобы на ней обязательно нашлась точка $z_1 \in \gamma$, в которой $|f(z_1)| = m < M$. (Это всегда возможно, ибо такие точки есть в любой окрестности z_0 .)

Поскольку модуль непрерывной функции – также непрерывная функция (проверить), то в некоторой окрестности точки z_1 всюду $|f(z)| \leq \frac{m+M}{2} < M$. Пусть это неравенство выполнено на γ_1 – части окружности γ .

Тогда с одной стороны, из теоремы 6.10 (стр. 49)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) d\varphi,$$

а с другой стороны

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\zeta) d\varphi \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\varphi + \int_{\gamma \setminus \gamma_1} f(\zeta) d\varphi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left(\left| \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\varphi \right| + \left| \int_{\gamma \setminus \gamma_1} f(\zeta) d\varphi \right| \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\gamma_1} |f(\zeta)| d\varphi + \int_{\gamma \setminus \gamma_1} |f(\zeta)| d\varphi \right) \leq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m+M}{2} \int_{\gamma_1} d\varphi + M \int_{\gamma \setminus \gamma_1} d\varphi \right) < \frac{M}{2\pi} \int_{\gamma} d\varphi = M. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$M = |f(z_0)| < M.$$

Полученное противоречие означает, что наше изначальное предположение о том, что максимум модуля $\max_{z \in \bar{D}} |f(z)| = M$ достигается внутри D , является неверным.

□

7. Ряд Тейлора

7.1. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов

Теорема 7.1 (О почленном интегрировании).

Усл. $\forall k \in \mathbb{N}$ $f_k(z)$ аналитичны в односвязной области D .

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно в D .

Утв. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ можно интегрировать почленно по любому контуру, целиком лежащему в D :

$$\int_C \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz.$$

Доказательство. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \xrightarrow{D} f(z)$. Поскольку аналитические функции непрерывны, а ряд сходится равномерно к $f(z)$, то $f(z)$ также непрерывна и, следовательно, интегрируема. По определению равномерной сходимости,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall z \in D \quad \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \frac{\varepsilon}{2L},$$

где L – длина кривой C . Перейдём в последнем неравенстве к пределу при $p \rightarrow \infty$ и получим:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2L} < \frac{\varepsilon}{L}.$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_C f_k(z) dz \right| &= \left| \int_C f(z) dz - \int_C \sum_{k=1}^n f_k(z) dz \right| = \left| \int_C \left(f(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right) dz \right| = \\ &= \left| \int_C \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) dz \right| \leq \int_C \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) dz \right| < \frac{\varepsilon}{L} \cdot L = \varepsilon, \end{aligned}$$

что и доказывает теорему. □

Теорема 7.2 (Об аналитичности суммы ряда).

Усл. $\forall k \in \mathbb{N} f_k(z)$ аналитичны в односвязной области D .

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно в D .

Утв. Сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ аналитична в D .

Доказательство. Проинтегрируем данный ряд по любому замкнутому контуру C , целиком лежащему в D . По теореме 7.1, ряд можно интегрировать почленно:

$$\int_C \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz.$$

Но по интегральной теореме Коши (теорема 6.2, стр. 40) $\int_C f_k(z) dz = 0$ при всех k . Поэтому для любого замкнутого контура $C \subset D$

$$\int_C \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) dz = 0.$$

Непрерывность подынтегрального выражения следует из свойств равномерно сходящихся рядов функций действительной переменной (действительно, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, y) + i \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x, y)$, а u_k и v_k – непрерывные функции). Теперь мы имеем право применить теорему Морера (теорема 6.9, стр. 48): непрерывная функция, интегралы от которой по всем замкнутым $C \subset D$ равны нулю, является аналитической в D . □

Теорема 7.3 (Об аналитичности суммы степенного ряда).

Усл. Степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ сходится в $|z - z_0| < R$.

Утв. Сумма ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ аналитична в $|z - z_0| < R$.

Доказательство. Функции $c_k(z - z_0)^k$ аналитичны всюду в \mathbb{C} , а ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ сходится равномерно в круге $|z - z_0| < r$ при всех $r < R$ (утверждение 3.1, стр. 19). Поэтому в круге $|z - z_0| < r$ можно применить теорему 7.2. Получим, что сумма степенного ряда аналитична в каждом из кругов $|z - z_0| < r$ при всех $r < R$. Значит, она аналитична во всех точках круга $|z - z_0| < R$. \square

Теорема 7.4 (О почленном дифференцировании).

Усл. $\forall k \in \mathbb{N}$ $f_k(z)$ аналитичны в односвязной области D .

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ сходится равномерно в D .

Утв. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ можно почленно дифференцировать любое число раз:

$$\frac{d^m}{dz^m} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(m)}(z) dz.$$

Доказательство. Фиксируем произвольную точку $z \in D$ и рассмотрим какой-нибудь контур C , окружающий z и лежащий в D . Поскольку $\frac{m!}{(\zeta - z)^m}$ при каждом (фиксированном!) $m \in \mathbb{N}$ ограничено по модулю, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m! \cdot f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^m}$ также будет сходиться равномерно в D . Действительно, пусть $\frac{m!}{(\zeta - z)^m} = \rho e^{i\alpha}$, тогда

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{m! \cdot f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^m} \right| = \left| \sum_{k=n}^{n+p} \rho e^{i\alpha} \cdot f_k(\zeta) \right| = \rho \left| e^{i\alpha} \sum_{k=n}^{n+p} f_k(\zeta) \right| = \rho \cdot \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(\zeta) \right|$$

По критерию Коши равномерной сходимости ряда (теорема 3.1, стр. 16), из равномерной в D сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\zeta)$ следует равномерная в D сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m! \cdot f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^m}$.

По интегральной формуле Коши и по теореме 7.1 о почленном интегрировании,

$$\frac{d^m}{dz^m} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) = \frac{m!}{2\pi i} \int_C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^m} d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m!}{2\pi i} \int_C \frac{f_k(\zeta)}{(\zeta - z)^m} d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(m)}(z).$$

\square

Замечание 7.1. Как показывает эта теорема, если ряд составлен из аналитических функций, то для правомерности его почленного дифференцирования достаточно лишь его равномерной сходимости. Это – ещё одно существенное отличие аналитических функций от действительных функций действительных переменных, ведь для возможности почленного дифференцирования ряда обычных функций не достаточно его равномерной сходимости, а требуется равномерная сходимость ряда из производных.

Теорема 7.5 (О радиусе сходимости продифференцированного степенного ряда).

Усл. Радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ равен R .

Утв. Радиус сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot k(z - z_0)^{k-1}$ также равен R .

Доказательство. Воспользуемся формулой Коши – Адамара (стр. 18):

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k-1]{|c_k \cdot k|} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k-1]{|c_k|} \cdot \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k-1]{k}}_1 = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = R. \quad \square$$

Теорема 7.6 (О радиусе сходимости проинтегрированного степенного ряда).

Усл. Радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ равен R .

Утв. Радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{z_1}^z (\zeta - z_0)^k d\zeta$ также равен R (интеграл берётся по произвольному контуру, соединяющему точки z_1 и z , лежащему в круге $|\zeta - z_0| \leq R$).

Доказательство. По теореме 6.4 (стр. 42), функции $\int_{z_1}^z (\zeta - z_0)^k d\zeta$ есть аналитические функции, являющиеся к тому же первообразными для $(z - z_0)^k$. Отсюда

$$\int_{z_1}^z (\zeta - z_0)^k d\zeta = \frac{(z - z_0)^{k+1} - (z_1 - z_0)^{k+1}}{k + 1}.$$

Найдём радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$. По формуле Коши – Адамара (стр. 18):

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{|c_k|}{k+1}} = \frac{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k+1}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = R.$$

Таким образом, ряды $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$ и $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z_1 - z_0)^{k+1}$ сходятся абсолютно при $|z - z_0| < R$ и $|z_1 - z_0| < R$. Поэтому их можно складывать (вычитать) почленно:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z_1 - z_0)^{k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} ((z - z_0)^{k+1} - (z_1 - z_0)^{k+1}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{z_1}^z (\zeta - z_0)^k d\zeta. \end{aligned}$$

Поэтому данный ряд из интегралов на самом деле – степенной. Наконец, поскольку вычитаемый ряд числовой и сходящийся, то радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{z_1}^z (\zeta - z_0)^k d\zeta$ равен радиусу сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}$, а значит, и ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$. \square

7.2. Вывод формулы суммы геометрической прогрессии

Выведем формулу суммы геометрической прогрессии для случая комплексных чисел.

Утверждение 7.1.

$$\text{Утв. } \forall q \in \mathbb{C}, q \neq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}+ \quad q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Доказательство. Обозначим сумму $1 + q + q^2 + \dots + q^n$ через S_n . Тогда с одной стороны:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} = S_n + q^{n+1},$$

с другой стороны:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} = 1 + q \cdot S_n.$$

Сопоставляя эти два равенства, получаем

$$S_n + q^{n+1} = 1 + q \cdot S_n.$$

Перенесём S_n в левую часть: $(1 - q)S_n = 1 - q^{n+1}$. Выразим S_n :

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Заметим, что в этом доказательстве мы пользовались только свойствами арифметических операций, которые верны в том числе и для комплексных чисел. \square

Утверждение 7.2.

Утв.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \quad \forall q \in \mathbb{C} : |q| < 1.$$

Доказательство.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} \right) = \left[|q| < 1 \right] = \frac{1}{1 - q}.$$

\square

7.3. Ряд Тейлора

Теорема 7.7 (О представлении аналитической функции рядом Тейлора).

Усл. $f(z)$ аналитична в круге $\{z : |z - a| < R\}$.

Утв. **Ряд Тейлора** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$ **функции** $f(z)$ **сходится** к ней в этом круге, причём в любой замкнутой подобласти этого круга сходимость равномерна:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n, \quad \{z : |z - a| < R\}. \quad (7.1)$$

Доказательство. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $\{|z - a| < R\}$. Рассмотрим окружность

$$C = \{\zeta : |\zeta - a| = r\} \quad \text{при некотором } r < R.$$

Фиксируем произвольную точку $z \in \{|z - a| < r\}$ и выпишем цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^n = \\ &= \left[\left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| = |q| < 1 \right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv f(z). \end{aligned}$$

При этих выкладках мы воспользовались: при первом переходе теоремой 6.6 (стр. 46), при втором теоремой 7.1 (стр. 50), при третьем – формулой суммы геометрической прогрессии, при последнем – интегральной формулой Коши (теорема 6.5, стр. 43). Осталось выяснить, при каких же z проведённые преобразования правомочны:

Первый и последний переходы имеют право на существование при всех z , принадлежащих области аналитичности $f(z)$ внутри контура C , то есть в круге $\{|z - a| < r\}$.

Второй переход можно делать, если ряд сходится равномерно в области, содержащей C . Заметим, что сходимость ряда должна быть равномерна относительно переменной, по которой происходит интегрирование, т.е. по ζ . Но при произвольном фиксированном $z \in \{|z - a| < r\}$

$$|q| = \left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| = \frac{|z - a|}{r} < 1 \quad z \in \{|z - a| < r\} \text{ — фиксированное число,}$$

откуда по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов (стр. 17) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$ сходится равномерно по ζ в любой области, где $|q| \leq \text{const} < 1$, в частности, на контуре C .

Третий переход возможен при таких z и ζ , для которых $|q| < 1$, то есть для $z \in \{|z - a| < r\}$, $\zeta \in C$ это действие правомочно.

Итак, равенство (7.1) доказано для всех $z \in \{|z - a| < r\}$. Но поскольку для любой $z \in \{|z - a| < R\}$ можно так подобрать число $r < R$, чтобы точка z оказалась внутри $z \in \{|z - a| < r\}$, то равенство (7.1) верно всюду в круге сходимости $z \in \{|z - a| < R\}$. Равномерная сходимость в любой замкнутой подобласти данного ряда, в силу того, что он – степенной, следует из утверждения 3.1 (стр. 19). \square

Имеет место обратная теорема.

Теорема 7.8 (О степенных рядах как рядах Тейлора).

Усл. Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ сходится в круге $\{z : |z-a| < R\}$ к некоторой функции $S(z)$.

Утв. Функция $S(z)$ является аналитической в круге $\{z : |z-a| < R\}$, и её ряд Тейлора с центром в точке a совпадает с рядом $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$.

Доказательство.

- 1) По теореме 7.3 (стр. 52) сумма степенного ряда является аналитической функцией.
- 2) Продифференцируем k раз ряд $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Первые k слагаемые обратятся в нуль:

$$S^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \cdot n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)(z-a)^{n-k}.$$

Подставим в полученное равенство $z = a$, чтобы обнулить все слагаемые, кроме первого с номером $n = k$:

$$S^{(k)}(a) = c_k \cdot k(k-1) \cdot \dots \cdot (k-k+1) = c_k \cdot k!$$

Отсюда, $c_k = \frac{S^{(k)}(a)}{k!}$. Поскольку число k мы брали произвольным, то все коэффициенты заданного степенного ряда совпадают с коэффициентами ряда Тейлора для функции $S(z)$. \square

7.4. Изолированные нули и теорема единственности

Опр. 7.1.

- 1) **Точку $z = a$** мы будем называть **нулём аналитической функции $f(z)$** , если $f(a) = 0$.
- 2) **Точку $z = a$** мы будем называть **нулём порядка k аналитической функции $f(z)$** , если $f(a) = f'(a) = \dots = f^{k-1}(a) = 0$ и $f^k(a) \neq 0$.

Если разложить аналитическую функцию $f(z)$, имеющую в точке a нуль порядка k , в ряд Тейлора с центром в точке a , то, очевидно, первые его k слагаемых равны нулю:

$$f(z) = \frac{f^k(a)}{k!}(z-a)^k + \frac{f^{k+1}(a)}{(k+1)!}(z-a)^{k+1} + \dots = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n. \quad (7.2)$$

Теорема 7.9 (Об изолированных нулях).

Усл. $f(z)$ аналитична в окрестности своего нуля $z = a$ и не равна тождественно нулю ни в какой его окрестности.

Утв. Существует окрестность точки $z = a$, в которой $f(z)$ не имеет других нулей. (Другими словами, $z = a$ – изолированный нуль функции $f(z)$.)

Доказательство. Поскольку $f(z) \neq 0$ ни в какой окрестности точки a , то её ряд Тейлора обязан содержать отличные от нуля члены. Пусть номер первого члена, отличного от нуля, есть k :

$$f(z) = \frac{f^k(a)}{k!}(z-a)^k + \frac{f^{k+1}(a)}{(k+1)!}(z-a)^{k+1} + \dots = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n, \quad f^k(a) \neq 0. \quad (7.2)$$

Тогда a – нуль порядка k функции $f(z)$. Поделим равенство (7.2) на $(z - a)^k$. Получим:

$$\frac{f(z)}{(z - a)^k} = \frac{f^k(a)}{k!} + \frac{f^{k+1}(a)}{(k + 1)!}(z - a) + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(z - a)^m,$$

где $c_m = \frac{f^{m+k}(a)}{(m+k)!}$. Ряд в правой части является степенным, следовательно, сходится в круге некоторого радиуса R . На самом деле, R – равняется радиусу сходимости ряда (7.2), поскольку, по формуле Коши–Адамара он вычисляется как предел корней степени n из модулей коэффициентов ряда (7.2). Обозначим функцию, к которой он сходится, через $\varphi(z)$:

$$\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(z - a)^m$$

и заметим, что $\varphi(a) = \frac{f^k(a)}{k!} \neq 0$. При этом по теореме 7.8 ряд $\sum_{m=0}^{\infty} c_m(z - a)^m$ является рядом Тейлора функции $\varphi(z)$, причём $\varphi(z)$ аналитична внутри круга сходимости. Из аналитичности $\varphi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ следует непрерывность функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке a . Хотя бы одна из функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ не равна нулю в a , т.к. $\varphi(a) \neq 0$, и по теореме о сохранении знака непрерывной функцией она не обратится в нуль в некоторой окрестности точки a . Отсюда $f(z) = \varphi(z)(z - a)^k$ также не обратится в нуль в той же окрестности нигде, кроме точки $z = a$. \square

Теорема 7.10 (Единственность аналитических функций).

Усл. Функции $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны в D и совпадают в точках a_n , причём

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in D.$$

Утв.

$$f(z) \equiv g(z), \quad z \in D.$$

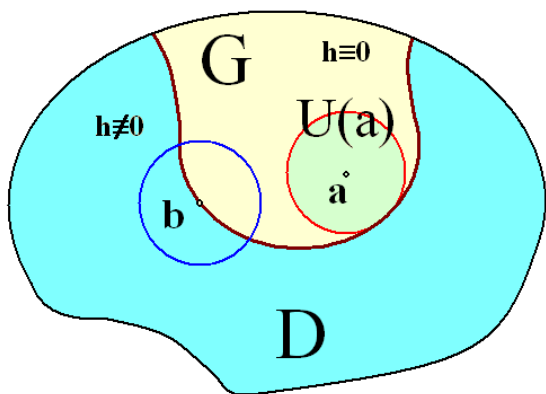
Доказательство. Рассмотрим функцию $h(z) = f(z) - g(z)$. Она аналитична в D и, т.к. $f(a_n) = g(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$,

$$h(a_n) = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При этом $h(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(a_n) = 0$.

Пусть $h(z) \not\equiv 0$ ни в какой окрестности точки a . Тогда она, по теореме 7.9 об изолированных нулях, не имеет других нулей, кроме a в некоторой окрестности a . Однако такой окрестности не существует, поскольку $a_n \rightarrow a$, $n \rightarrow \infty$ и $h(a_n) = 0$. Полученное противоречие говорит, что наше предположение об отсутствии такой окрестности точки a , в которой $h(z) \equiv 0$, неверно. Значит, есть окрестность $U(a)$ точки a , такая что $h(z) \equiv 0$ в $U(a)$. В реальности $h(z)$ может быть тождественным нулём и за пределами $U(a)$, поэтому обозначим через G область, содержащую $U(a)$ и такую, что $\forall z \in G$ $h(z) = 0$, а в любой окрестности каждой точки её границы ∂G содержатся точки, где $h(z) \neq 0$ (или не определена).

- 1) Если $D \subseteq G$, то теорема доказана.
- 2) Предположим, что $D \setminus G = M \neq \emptyset$.



Тогда по крайней мере часть границы ∂G лежит в D . Рассмотрим любую точку b этой части границы ∂G .

С одной стороны, раз она на границе G , то в любой её окрестности есть точки, в которых $h(z) = 0$.

С другой стороны, раз она на границе G , то $h(z) \neq 0$ в любой окрестности точки b . Следовательно, по теореме 7.9 об изолированных нулях, $h(z)$ не имеет других нулей, кроме b в некоторой окрестности b .

Полученное противоречие говорит о том, что наше предположение, что $D \setminus G = M \neq \emptyset$ является неверным. Таким образом, $h(z) \equiv 0$ всюду в D .

Но $h(z) = f(z) - g(z) \Rightarrow f(z) \equiv g(z), z \in D$. □

8. Ряд Лорана

8.1. Разложение аналитической в кольце функции в ряд

Мы выяснили, что функцию, аналитическую в круге, можно и притом единственным образом разложить в степенной ряд – ряд Тейлора, который будет сходиться к данной функции внутри круга аналитичности. А что делать, если заданная функция аналитична в области иного вида, например, всюду в круге $\{z : |z - a| < R\}$ кроме самой точки $z = a$, то есть в кольцевой области $\{z : 0 < |z - a| < R\}$? Оказывается, что для функций, аналитических в кольцевых областях $\{z : r < |z - a| < R\}$, где $0 \leq r < R \leq \infty$, можно построить разложения по положительным и отрицательным степеням $(z - a)$. Данное разложение является обобщением изученного нами ряда Тейлора.

Теорема 8.1 (Лоран, 1843г).

Усл. $f(z)$ аналитична в кольце $K = \{z : r < |z - a| < R\}$, где $0 \leq r < R \leq \infty$.

Утв. В кольце K справедливо равенство

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n. \tag{8.1}$$

с коэффициентами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \tag{8.2}$$

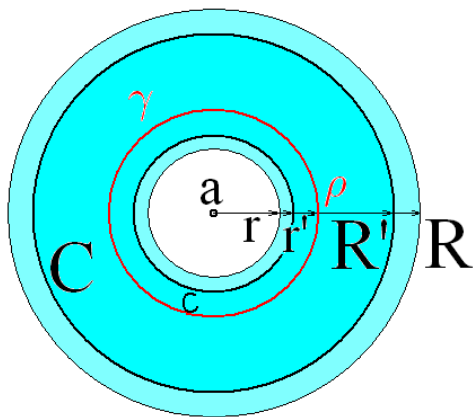
где $\gamma = \{z : |z - a| = \rho\}$ – окружность произвольного радиуса $\rho \in (r, R)$, лежащая в K причём в любой замкнутой подобласти K ряд Лорана (8.1) сходится к $f(z)$ равномерно.

Доказательство.

Фиксируем произвольную точку $z \in K$ и окружность $\gamma = \{z : |z - a| = \rho\}$ произвольного радиуса $\rho \in (r, R)$. Введём пару чисел r', R' таких, что

$$r < r' < |z - a| < R' < R,$$

$$r' < \rho < R'.$$



Рассмотрим кольцо $K' = \{z : r' < |z - a| < R'\}$, где $r < r' < R' < R$, целиком лежащее в K . Заметим, что мы выбрали K' так, чтобы и фиксированная в начале доказательства точка z , и окружность γ попали внутрь K' . Обозначим окружности, ограничивающие кольцо K' , через

$$c = \{z : |z - a| = r'\} \text{ и } C = \{z : |z - a| = R'\}.$$

Поскольку функция $f(z)$ аналитична в K' и на её граничных контурах c и C , то мы имеем право воспользоваться интегральной формулой Коши (теорема 6.5, стр. 43). Итак, $\forall z \in K'$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}, \quad (8.3)$$

где обе окружности c и C проходятся против часовой стрелки.

Далее, так как для произвольной окружности γ радиуса $\rho : r' < \rho < R'$ с центром в точке $z = a$ функция $f(z)$ аналитична в области, содержащей c , γ и C , то следующие три интеграла равны:

$$\int_c \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta \quad (8.4)$$

Теперь рассмотрим ряд из (8.1) в произвольной фиксированной точке $z \in K'$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n &= [\text{в силу (8.2)}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (z - a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = [\text{в силу (8.4)}] = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (z - a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (z - a)^{-k} \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{-k+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (z - a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^k d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^k d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} \cdot \frac{\zeta - a}{z - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - a}{z - a}} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\zeta - a}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{z - \zeta} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \\ &= [\text{в силу (8.3)}] = f(z). \end{aligned}$$

Переставить местами операции интегрирования и суммирования ряда нам позволяет в обоих случаях теорема 7.1 (стр. 50), поскольку для любой точки $z \in K'$ оба ряда будут сходиться равномерно по ζ (здесь важно помнить, что в одном ряде $\zeta \in c$, в то время, как в другом $\zeta \in C$).

Наконец, в силу произвольности выбора кольца K' , точнее чисел r' , R' из условия $r < r' < R' < R$, формула (8.1) верна во всех точках $z \in K$. \square

Теорема 8.2 (Единственность ряда Лорана).

Усл. Обобщённый степенной ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$ сходится в кольце $\{z : r < |z - a| < R\}$, $0 \leq r < R \leq \infty$ к некоторой функции $S(z)$.

Утв. Функция $S(z)$ является аналитической в кольце $\{z : r < |z - a| < R\}$, и её ряд Лорана с центром в точке a совпадает с рядом $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$.

Доказательство.

1) Фиксируем произвольную точку $z \in \{r < |z - a| < R\}$ и подберём числа r' и R' так, чтобы $r < r' < |z - a| < R' < R$. Поскольку степенные ряды

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z - a)^n \Rightarrow, \quad \text{на } \{|z - a| < R'\}, \quad (8.5)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - a)^n \Rightarrow, \quad \text{на } \{|z - a| > r'\}, \quad (8.6)$$

то, по теореме 7.4 (стр. 52) ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$ можно дифференцировать почленно в кольце $\{z : r' < |z - a| < R'\}$, $0 \leq r < R \leq \infty$ сколько угодно раз. Из (8.5) – (8.6) следует также, что эти ряды сходятся равномерно в каждой замкнутой подобласти исходного кольца $\{r < |z - a| < R\}$.

Раз можно дифференцировать правую часть равенства $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n$, то можно и левую, а следовательно, $S(z)$ является аналитической в кольце $\{z : r < |z - a| < R\}$.

2) Поделим равенство $S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^n$ на $(z - a)^{k+1}$:

$$\frac{S(z)}{(z - a)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - a)^{n-k-1}$$

и проинтегрируем его по $\gamma = \{z : |z - a| = \rho\}$, где $\rho \in (r, R)$:

$$\int_{\gamma} \frac{S(z)}{(z - a)^{k+1}} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\gamma} (z - a)^{n-k-1} dz. \quad (8.7)$$

Вычислим интеграл в правой части

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (z - a)^{n-k-1} dz &= \left[z = a + \rho e^{i\varphi}, \quad dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \right] = \\ &= \int_0^{2\pi} \rho^{n-k-1} \cdot e^{i\varphi(n-k-1)} i\rho e^{i\varphi} d\varphi = i\rho^{n-k} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(n-k)} d\varphi. \end{aligned}$$

При $k \neq n$ этот интеграл равен

$$i\rho^{n-k} \frac{e^{i\varphi(n-k)}}{i(n-k)} \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \rho^{n-k} \frac{e^{i2\pi(n-k)} - e^0}{i(n-k)} = \rho^{n-k} \frac{1 - 1}{i(n-k)} = 0,$$

а при $k = n$ он вычисляется так:
$$i\rho^0 \int_0^{2\pi} 1d\varphi = 2\pi i.$$

Таким образом,

$$\int_{\gamma} (z - a)^{n-k-1} dz = \begin{cases} 0, & \text{при } k \neq n; \\ 2\pi i, & \text{при } k = n. \end{cases}$$

Поэтому из всех слагаемых правой части (8.7) останется только одно, не равное нулю, и

$$\int_{\gamma} \frac{S(z)}{(z - a)^{k+1}} dz = 2\pi i c_k.$$

Данная формула совпадает с формулой вычисления коэффициентов ряда Лорана (8.2). А поскольку число k мы брали произвольным, то все коэффициенты заданного степенного ряда совпадают с коэффициентами ряда Лорана для функции $S(z)$ в кольце $\{z : r < |z - a| < R\}$. \square

Замечание 8.1. Ряд Тейлора любой функции $f(z)$, сходящийся к ней в некотором круге $\{z : |z - a| < R\}$, является также её рядом Лорана в кольце $\{z : 0 < |z - a| < R\}$. Действительно, раз функция разложима в ряд Тейлора в круге $\{z : |z - a| < R\}$, значит, она в нём аналитична. Поэтому в кольце $\{z : 0 < |z - a| < R\}$ она также аналитична и, следовательно, представима рядом Лорана. При этом коэффициенты с номерами $k \geq 0$ её ряда Лорана вычисляются по тем же формулам, что и коэффициенты ряда Тейлора. А коэффициенты ряда Лорана с номерами $k < 0$ все равны нулю, в силу интегральной теоремы Коши (теорема 6.3, стр. 41).

Пример 8.1. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)}$ в степенной ряд по степеням $(z - 1)$. (Данное задание можно сформулировать иначе: разложить $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z = 1$.)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z-1)(z+i)} &= \left[\zeta = z - 1 \right] = \frac{1}{\zeta(\zeta + 1 + i)} = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 + i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\zeta}{1+i}} = \\ &= \left[\text{по формуле Утв. 7.2, стр. 54} \right] = \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{1 + i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta^n}{(1 + i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \zeta^{n-1}}{(1 + i)^{n+1}} = \\ &= \left[\text{переименуем индекс суммирования: } k = n - 1 \right] = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \zeta^k}{(1 + i)^{k+2}} = \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (z - 1)^k}{(1 + i)^{k+2}}. \end{aligned}$$

Поскольку мы воспользовались формулой суммы геометрической прогрессии, верной при $|q| = \left| \frac{\zeta}{1+i} \right| < 1$, то полученное нами разложение верно при $0 < |z - 1| = |\zeta| < |1 + i| = \sqrt{2}$, и ряд сходится к $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)}$ в кольце $z \in \{0 < |z - 1| < \sqrt{2}\}$.

Пример 8.2. Разложить функцию $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ ($|a| < |b|$) в степенной ряд в кольце $|a| < |z| < |b|$. Поскольку центр кольца – точка $z = 0$, то разложение $f(z)$ должно быть по степеням z .)

Шаг 1. Разложим данную функцию на простейшие дроби:

$$f(z) = \frac{1}{(z - a)(z + b)} = \frac{1}{a - b} \left(\frac{1}{z - a} - \frac{1}{z - b} \right)$$

Шаг 2. Поскольку кольцо $|a| < |z| < |b|$ есть пересечение **внешности круга** $|z| \leq |a|$ и **внутренности круга** $|z| \leq |b|$, то первую дробь $\frac{1}{z-a}$ надо раскладывать в $|z| > |a|$, то есть по степеням $\frac{1}{z}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-a} &= \left[\zeta = \frac{1}{z} \right] = \frac{1}{\frac{1}{\zeta} - a} = \zeta \cdot \frac{1}{1 - a\zeta} = \left[\text{по формуле Утв. 7.2, стр. 54} \right] = \zeta \sum_{n=0}^{\infty} a^n \zeta^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}} = \left[\text{переименуем индекс суммирования: } k = n + 1 \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{z^k}. \end{aligned}$$

Поскольку мы воспользовались формулой суммы геометрической прогрессии, верной при $|q| = \left| \frac{a}{z} \right| < 1$, то полученное нами разложение верно при $|a| < |z| < \infty$, и ряд сходится к $\frac{1}{z-a}$ в вне круга $|z| \leq |a|$.

Шаг 3. Поскольку кольцо $|a| < |z| < |b|$ есть пересечение **внешности круга** $|z| \leq |a|$ и **внутренности круга** $|z| \leq |b|$, то вторую дробь $\frac{1}{z-b}$ надо раскладывать в $|z| < |b|$, то есть по степеням z .

$$\frac{1}{z-b} = -\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{b}} = \left[\text{по формуле Утв. 7.2, стр. 54} \right] = -\frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}}.$$

Поскольку мы воспользовались формулой суммы геометрической прогрессии, верной при $|q| = \left| \frac{z}{b} \right| < 1$, то полученное нами разложение верно при $|z| < |b|$, и ряд сходится к $\frac{1}{z-b}$ в круге $|z| < |b|$.

Шаг 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{z^k}$ сходится к $\frac{1}{z-a}$ в вне круга $|z| \leq |a|$, а ряд $\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} \right)$ сходится к $\frac{1}{z-b}$ в круге $|z| < |b|$, поэтому их разность будет сходиться в пересечении областей сходимости каждого из них, то есть в кольце $|a| < |z| < |b|$. Таким образом, для функции $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ в этом кольце мы получили представление:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{z^k} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} \right) = \\ &= \left[\text{переименуем в первом ряде индекс суммирования: } n = -k \right] = \\ &= \frac{1}{a-b} \left(\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{a^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^{n+1}} \right) = \frac{1}{a-b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \end{aligned}$$

где
$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{a^{n+1}} & \text{при } n < 0, \\ b^{n+1} & \text{при } n \geq 0. \end{cases}$$

8.2. Неравенства Коши

Существуют очень полезные неравенства для коэффициентов ряда Лорана (и Тейлора).

Теорема 8.3.

Усл. $f(z)$ аналитична в кольце $K = \{z : r < |z-a| < R\}$, и ограничена $|f(z)| \leq M$ на окружности $\gamma = \{z : |z-a| = \rho\}$, где $0 \leq r < \rho < R \leq \infty$.

Утв. Для коэффициентов ряда Лорана $f(z)$ выполнены неравенства Коши:

$$|c_n| \equiv \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}} \right| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (8.8)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{|f(\zeta)d\zeta|}{|\zeta - a|^{n+1}} = \left[\begin{array}{l} \zeta = a + \rho e^{i\varphi} \\ d\zeta = i\rho e^{i\varphi} d\varphi \\ |\zeta - a| = \rho \end{array} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} \frac{|f(\zeta) \cdot i\rho e^{i\varphi}|}{\rho^{n+1}} d\varphi \leq \left[\begin{array}{l} f(\zeta) \leq M \\ |i\rho e^{i\varphi}| = \rho \end{array} \right] \leq \frac{M\rho}{2\pi\rho^{n+1}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{M}{\rho^n}. \end{aligned}$$

□

Следствие 8.1.

Усл. $f(z)$ аналитична в круге $B = \{z : |z - a| < R\}$, и ограничена $|f(z)| \leq M$ на окружности $\gamma = \{z : |z - a| = \rho\}$, где $0 < \rho < R$.

Утв. Для функции f и её производных $f^{(n)}$ в точке $z = a$ выполнены неравенства Коши:

$$|f^{(n)}(a)| \equiv \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \right| \leq \frac{n! \cdot M}{\rho^n}, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (8.9)$$

Доказательство. Пользуясь тем, что ряд Тейлора аналитической в круге $\{z : |z - a| < R\}$ функции $f(z)$ является её же рядом Лорана в кольце $\{z : 0 < |z - a| < R\}$, по теореме 8.3 получаем, что для коэффициентов c_n , $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ выполнены неравенства Коши (8.8). Умножим (8.8) на $n!$ при $n \geq 0$, учтём формулы (6.6) (стр. 46) и получим равенство (8.9). □

9. Изолированные особые точки и их классификация

9.1. Определение и примеры изолированных особых точек

Опр. 9.1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки $z = a$ и не аналитична в самой точке a . Тогда **точка** $z = a$ называется **изолированной особой точкой функции** $f(z)$.

Особые точки могут быть и не изолированными: например, функция $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ имеет в сколь угодно малой окрестности точки $z = 0$ точки $z_n = \frac{1}{\pi n}$, в которых знаменатель $\sin \frac{1}{z}$ функции $f(z)$ обращается в нуль, и, следовательно, нарушается аналитичность функции $f(z)$. Кроме того, к неизолированным особым точкам относятся точки ветвления (например, $z = 0$ у функций $\sqrt[n]{z}$ и $\text{Ln } z$), в окрестности которых функция не имеет ни одной аналитической ветви (т.к. обход вокруг точки ветвления приводит к переходу с одной ветви на другую).

Опр. 9.2. Изолированная особая точка $z = a$ функции $f(z)$ называется

- **устранимой особой точкой (УОТ) функции $f(z)$** , если её ряд Лорана в кольце $\{z : 0 < |z - a| < R\}$ не содержит слагаемых с отрицательными номерами:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

(Другими словами, если ряд Лорана совпадает с рядом Тейлора в круге $\{z : |z - a| < R\}$.)

- **полюсом порядка k (ПП k) функции $f(z)$** , если её ряд Лорана в кольце $\{z : 0 < |z - a| < R\}$ содержит слагаемое с отрицательным номером $(-k)$ и не содержит слагаемых с номерами, меньшими $(-k)$:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad c_{-k} \neq 0.$$

- **существенно особой точкой (СОТ) функции $f(z)$** , если её ряд Лорана в кольце $\{z : 0 < |z - a| < R\}$ содержит бесконечное число слагаемых с отрицательными номерами:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

$$\text{и } \forall N \in \mathbb{N} \exists n < -N : c_n \neq 0.$$

Пример 9.1 (Устранимая особая точка). Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ в окрестности точки $a = 0$. По определению функции $\sin z$ (стр. 20),

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Отсюда,

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Как видим, данный ряд Лорана (сходящийся всюду в \mathbb{C}) не содержит слагаемых с отрицательными степенями z . Поэтому, точка $a = 0$ (значение $f(z)$ в ней не определено) является УОТ.

Легко, кстати, найти предел этой функции в точке $a = 0$:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 0^{2n}}{(2n+1)!} = 1,$$

то есть на комплексной плоскости также имеет место Первый Замечательный Предел:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Пример 9.2 (Полюс порядка k).

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда функция $f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}$ имеет в точке $z = a$ полюс порядка k .

В самом деле, её ряд Лорана в окрестности этой точки содержит ровно 1 слагаемое и имеет вид:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^n, c_n = \begin{cases} 1, & \text{в случае } n = -k, \\ 0, & \text{в случае } n \neq -k. \end{cases}$$

Таким образом, для $f(z)$ выполнено определение ПП k в точке $z = a$.

Пример 9.3 (Существенно особая точка).

Рассмотрим функцию $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ в окрестности $z = 0$. Её ряд Лорана выглядит так:

$$e^{-\frac{1}{z}} = \left[y = -\frac{1}{z} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n \cdot n!} = [k = -n] = \sum_{k=-\infty}^0 \frac{z^k}{(-k)!}, \quad 0 < z < \infty.$$

Таким образом, ряд Лорана $f(z)$ содержит бесконечное число слагаемых при отрицательных степенях z , следовательно, точка $z = 0$ – СОТ функции $e^{-\frac{1}{z}}$.

Замечание 9.1. Заметим, что из теорем 7.7 и 8.1 (стр. 55 и 58) о представлении функции рядом Тейлора и Лорана, следует, что на границе области сходимости каждого из этих рядов обязательно должны быть особые точки раскладываемой функции.

Таким образом, зная где находятся ближайшие к центру ряда (точке $z = a$) особые точки функции $f(z)$, можно точно сказать, в каком круге (кольце) этот ряд будет сходиться. Например, в примере 8.2 (стр. 8.2), функцию $f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$ ($|a| < |b|$) можно разложить в ряд

- 1) по степеням z в круге $|z| < |a|$;
- 2) по степеням z в кольце $|a| < |z| < |b|$;
- 3) по степеням z в окрестности бесконечности $|z| > |b|$;
- 4) по степеням $(z - a)$ в кольце $0 < |z - a| < |b - a|$;
- 5) по степеням $(z - a)$ в окрестности бесконечности $|z - a| > |b - a|$;
- 6) по степеням $(z - b)$ в кольце $0 < |z - b| < |a - b|$;
- 7) по степеням $(z - b)$ в окрестности бесконечности $|z - b| > |a - b|$;
- 8) по степеням $(z - c)$ в круге $|z - c| < \min\{|z - a|, |z - b|\}$;
- 9) по степеням $(z - c)$ в кольце $\min\{|z - a|, |z - b|\} < |z - c| < \max\{|z - a|, |z - b|\}$;
- 10) по степеням $(z - c)$ в окрестности бесконечности $|z - c| > \max\{|z - a|, |z - b|\}$.

9.2. Поведение функции в окрестности изолированной особой точки

9.2.1. Поведение функции в окрестности устранимой особой точки

Теорема 9.1 (Поведение в окрестности устранимой особой точки).

Усл. $f(z)$ аналитична в окрестности устранимой особой точки $z = a$.

Утв. Функцию $f(z)$ можно доопределить в точке $z = a$ так, чтобы полученная функция стала аналитичной в $z = a$.

Доказательство. Поскольку ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности устранимой особой точки имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, то есть является степенным рядом, то как любой степенной ряд он сходится к некоторой функции $S(z)$ в некотором круге $\{z : |z-a| < R\}$, где радиус R определяется по формуле Коши–Адамара (стр. 18). (Без ограничения общности можно считать, что данный круг совпадает с окрестностью точки $z = a$, в которой $f(z)$ аналитична.) По теореме 7.8 (стр. 56), данный ряд является рядом Тейлора функции $S(z)$ в круге $\{z : |z-a| < R\}$. При этом, в силу замечания (стр. 61), он является также рядом Лорана функции $S(z)$ в кольце $\{z : 0 < |z-a| < R\}$. Но в этом кольце данный ряд является рядом Лорана функции $f(z)$. Значит, $S(z) \equiv f(z)$ в кольце $\{z : 0 < |z-a| < R\}$. При этом $S(z)$ аналитична во всём круге, в том числе и в точке $z = a$. Таким образом, если доопределить $f(a)$ значением $S(a)$, мы получим функцию $f(z)$, аналитичную в круге, включая точку a . \square

Теорема 9.2 (Обратная теорема).

Усл. $f(z)$ аналитична и ограничена $|f(z)| < M$ в окрестности изолированной особой точки $z = a$.

Утв. Точка $z = a$ – устранимая особая точка функции $f(z)$.

Доказательство. Так как $f(z)$ аналитична в окрестности изолированной особой точки $z = a$, то её можно разложить в ряд Лорана в кольце $\{z : 0 < |z-a| < R\}$. Рассмотрим формулы вычисления коэффициентов ряда:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

где контуром интегрирования γ является произвольная окружность с центром в $z = a$ и радиусом $\rho < R$. Поскольку $|f(z)| < M$, то $|c_n| < \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\rho e^{i\varphi}| d\varphi}{|\rho e^{i\varphi}|^{n+1}} = \frac{M}{\rho^n}$. При этом, данная оценка верна сразу для всех окружностей γ радиусом $\rho < R$, поэтому в последнем неравенстве при $n < 0$ можно перейти к пределу при $\rho \rightarrow +0$. Левая часть от γ , то есть от ρ , не зависит, следовательно, не изменится, а правая при $n < 0$ стремится к 0. Поэтому $c_n = 0$ при $n < 0$. \square

9.2.2. Поведение функции в окрестности полюса

Теорема 9.3 (Поведение в окрестности полюса).

Усл. $f(z)$ аналитична в окрестности полюса $z = a$ порядка k .

Утв.

- 1) $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$;
- 2) $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) = \infty, \quad m = \overline{0, k - 1}$;
- 3) $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^k f(z) = \text{const} \neq 0$.

Доказательство. Домножим данную функцию $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z - a)^n$ на $(z - a)^m$. Получим:

$$\begin{aligned} f(z)(z - a)^m &= \frac{c_{-k}}{(z - a)^{k-m}} + \frac{c_{-k+1}}{(z - a)^{k-m-1}} + \frac{c_{-k+2}}{(z - a)^{k-m-2}} + \dots = \\ &= \frac{1}{(z - a)^{k-m}} \cdot \underbrace{(c_{-k} + c_{-k+1}(z - a) + c_{-k+2}(z - a)^2 + \dots)}_{\varphi(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z - a)^{k-m}}, \end{aligned}$$

где аналитическая функция $\varphi(z)$ не равна нулю в точке $z = a$:

$$\varphi(a) = c_{-k} \neq 0.$$

Поэтому

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z)(z - a)^m = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{(z - a)^{k-m}} = \begin{cases} \infty & \text{при } m < k, \\ c_{-k} & \text{при } m = k, \\ 0 & \text{при } m > k. \end{cases}$$

□

9.2.3. Поведение функции в окрестности существенно особой точки

Теорема 9.4 (Сохоцкого – Вейерштрасса).

Усл. $f(z)$ аналитична в окрестности существенно особой точки $z = a$.

Утв. $\forall A \in \mathbb{C} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists z_1 : |z_1 - a| < \delta, \quad \text{в которой } |f(z_1) - A| < \varepsilon.$

Замечание 9.2. Эту теорему иногда формулируют иначе, заменяя её утверждение на

$$\forall A \in \mathbb{C} \quad \exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty} : \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, \quad f(z_n) \rightarrow A, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Пусть утверждение теоремы неверно, то есть

$$\exists A \in \mathbb{C} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall z : |z - a| < \delta \quad \text{верно неравенство } |f(z) - A| \geq \varepsilon.$$

Тогда функция

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - A} \tag{9.1}$$

определена, аналитична и ограничена в $\{z : 0 < |z - a| < \delta\}$. По теореме 9.2, точка $z = a$ является устранимой особой точкой функции $g(z)$.

Представим её рядом Лорана: $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$. Пусть первые k коэффициентов равны нулю, где $k \geq 0$. Тогда

$$g(z) = (z-a)^k \cdot \varphi(z), \quad k \geq 0,$$

где $\varphi(z)$ – аналитична в окрестности $z = a$ и в самой a , причём $\varphi(a) \neq 0$. В силу этих свойств функции $\varphi(z)$, функция $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ – аналитична в некоторой (быть может, другой) окрестности точки $z = a$, причём $\psi(a) \neq 0$. Выразим $f(z)$ из (9.1) и используем определение функции $\psi(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$:

$$f(z) = A + \frac{\psi(z)}{(z-a)^k} = A + \sum_{n=-k}^{\infty} \tilde{c}_n(z-a)^n, \quad \tilde{c}_{-k} = \frac{1}{c_k} \neq 0, \quad k \geq 0.$$

Но такой вид ряда Лорана функции $f(z)$ означает, что точка $z = a$ является либо (при $k > 0$) – полюсом порядка k , либо (при $k = 0$) – устранимой особой точкой функции $f(z)$, что противоречит условию теоремы. □

9.3. Бесконечно удалённая особая точка

Бесконечно удалённая точка комплексной плоскости является изолированной особой точкой заданной однозначной аналитической функции $f(z)$, если $\exists R > 0 : \forall z \in \{R < |z| < \infty\}$ функция f аналитична в точке z .

Пусть $z = \infty$ – изолированная особая точка функции $f(z)$. Тогда $\exists R > 0 : f(z)$ аналитична в кольце $K = \{R < |z| < \infty\}$, и её можно разложить в этом кольце в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad z \in K.$$

Так же, как и для конечной изолированной особой точки, здесь возможны три случая:

Опр. 9.3. Изолированная особая точка $z = \infty$ функции $f(z)$ называется

- **устранимой особой точкой функции $f(z)$** , если её ряд Лорана в кольце $\{z : R < |z| < \infty\}$ не содержит слагаемых с положительными номерами:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n}.$$

- **полюсом порядка k функции $f(z)$** , если её ряд Лорана в кольце $\{z : R < |z| < \infty\}$ содержит слагаемое с положительным номером k и не содержит слагаемых с номерами, большими k :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^k c_n z^n \equiv \sum_{n=-k}^{\infty} c_{-n} \left(\frac{1}{z}\right)^n, \quad c_k \neq 0.$$

- **существенно особой точкой функции $f(z)$** , если её ряд Лорана в кольце $\{z : R < |z| < \infty\}$ содержит бесконечное число слагаемых с положительными номерами:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

$$\text{и } \forall N \in \mathbb{N} \exists n > N : c_n \neq 0.$$

Пример 9.4. Функция $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ аналитична всюду, кроме точки $z = 0$ и, быть может, точки $z = \infty$ (последнюю всегда следует проверять отдельно). Чтобы выяснить характер особенностей сразу в обеих точках $z = 0$ и $z = \infty$, напомним ряд Лорана $f(z)$ в кольце $0 < |z| < \infty$:

$$e^{\frac{1}{z}} = \left[y = \frac{1}{z} \right] = e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^n}{(-n)!}.$$

Как мы видим, данный ряд содержит бесконечное число слагаемых с отрицательными степенями z и не содержит ни одного слагаемого с положительной степенью z . Поэтому, в силу определений типов изолированных особых точек, точка $z = 0$ является существенно особой, а $z = \infty$ – устранимой особой точкой функции $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

9.4. Приёмы, упрощающие классификацию изолированных особых точек.

В этом параграфе мы приведём несколько утверждений, не существенных с точки зрения теории, но существенно упрощающих на практике классификацию изолированных особых точек.

Мы будем для краткости использовать следующие сокращения:

УОТ – устранимая особая точка, ПП k – полюс порядка k СОТ – существенно особая точка,

Утверждение 9.1.

Усл. Точка $z = a$ изолированная особая точка функции $f(z)$.

$g(z)$ – аналитична в точке $z = a$ и её окрестности.

Утв. $f(z) \pm g(z)$ имеет в $z = a$ особенность того же типа, что и $f(z)$.

Доказательство. Разложим $f(z)$ и $g(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z = a$. Так как $g(z)$ аналитична в $z = a$ и её окрестности, то её ряд Лорана есть ряд Тейлора:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n.$$

С другой стороны, ряд Лорана функции $f(z)$ содержит слагаемые с отрицательными номерами:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

Здесь

- $k = 0$, если $z = a$ – устранимая особая точка;
- $k < 0$, если $z = a$ – полюс порядка $(-k)$;
- $k = -\infty$, если $z = a$ – существенно особая точка.

Тогда, поскольку степенные ряды (как и все абсолютно сходящиеся ряды) можно складывать почленно, ряд для $f \pm g$ будет выглядеть так:

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - a)^n = \sum_{n=k}^{-1} c_n (z - a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n) (z - a)^n.$$

Таким образом, ряд Лорана для функции $f(z) \pm g(z)$ имеет ровно столько же (и даже именно те же) слагаемых с отрицательными номерами, что и ряд для $f(z)$, следовательно точка $z = a$ – особая точка для $f(z) \pm g(z)$, причём именно того же типа, что и для $f(z)$. \square

Пример 9.5.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Так как первая дробь $\frac{1}{z-2}$ не имеет особенностей в точке $z = 1$, а вторая дробь $\frac{1}{z-1}$ не имеет особенностей в точке $z = 2$, то по утверждению 9.1 исходная функция $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в $z = 1$ имеет ту же особенность, что и $\frac{1}{z-1}$, то есть полюс порядка 1, а в $z = 2$ имеет ту же особенность, что и $\frac{1}{z-2}$, то есть тоже полюс порядка 1.

Пример 9.6.

$$e^{\frac{1}{z-b}} + \frac{1}{(z-a)^7}, \quad a \neq b.$$

Так как функция $\frac{1}{(z-a)^7}$ не имеет особенностей в точке $z = b$, а функция $e^{\frac{1}{z-b}}$ не имеет особенностей в точке $z = a$, то по утверждению 9.1 их сумма в $z = a$ имеет ту же особенность, что и $\frac{1}{(z-a)^7}$, то есть полюс порядка 7 (ПП7), а в $z = b$ имеет ту же особенность, что и $e^{\frac{1}{z-b}}$, то есть существенно особую точку (СОТ).

Утверждение 9.2.

Усл. Точка $z = a$ изолированная особая точка функции $f(z)$.
 $g(z)$ – аналитична в точке $z = a$ и её окрестности.

Утв.

- | | | |
|---|---------------|---|
| 1) Точка $z = a$ – УОТ функции $f(z)$ | \Rightarrow | $f(z) \cdot g(z)$ имеет УОТ в $z = a$; |
| 2) $g(a) \neq 0$. Точка $z = a$ – ППк функции $f(z)$ | \Rightarrow | $f(z) \cdot g(z)$ имеет ППк в $z = a$; |
| 3) Точка $z = a$ – СОТ функции $f(z)$ | \Rightarrow | $f(z) \cdot g(z)$ имеет СОТ в $z = a$. |

Доказательство. Разложим $f(z)$ и $g(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z = a$. Так как $g(z)$ аналитична в $z = a$ и её окрестности, то её ряд Лорана есть ряд Тейлора:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n.$$

С другой стороны, ряд Лорана функции $f(z)$ содержит слагаемые с отрицательными номерами:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

Здесь

- $k = 0$, если $z = a$ – устранимая особая точка;
- $k < 0$, если $z = a$ – полюс порядка $(-k)$;
- $k = -\infty$, если $z = a$ – существенно особая точка.

Тогда, поскольку степенные ряды (как и все абсолютно сходящиеся ряды) можно складывать почленно, ряд для $f \pm g$ будет выглядеть так:

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n = \sum_{n=k}^{-1} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (b_n + c_n)(z-a)^n.$$

Таким образом, ряд Лорана для функции $f(z) \pm g(z)$ имеет ровно столько же (и даже именно те же) слагаемых с отрицательными номерами, что и ряд для $f(z)$, следовательно точка $z = a$ – особая точка для $f(z) \pm g(z)$, причём именно того же типа, что и для $f(z)$. \square

Пример 9.7.

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

Так как первая дробь $\frac{1}{z-2}$ не имеет особенностей в точке $z = 1$, а вторая дробь $\frac{1}{z-1}$ не имеет особенностей в точке $z = 2$, то по утверждению 9.1 исходная функция $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ в $z = 1$ имеет ту же особенность, что и $\frac{1}{z-1}$, то есть полюс порядка 1, а в $z = 2$ имеет ту же особенность, что и $\frac{1}{z-2}$, то есть тоже полюс порядка 1.

Утверждение 9.3.

- Утв.1** Точка $z = a$ – нуль порядка k функции $f(z)$ \Rightarrow
 \Rightarrow точка $z = a$ – полюс порядка k функции $\frac{1}{f(z)}$.
- Утв.2** Точка $z = a$ – полюс порядка k функции $f(z)$ \Rightarrow
 \Rightarrow точка $z = a$ – нуль порядка k функции $\frac{1}{f(z)}$.

Доказательство. **1)** Разложим $f(z)$ в ряд Тейлора в окрестности $z = a$. Так как $z = a$ – нуль порядка k функции $f(z)$, то её ряд Тейлора не содержит слагаемых со степенями выражения $(z - a)$, меньшими, чем k :

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n = (z-a)^k \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^m}_{g(z)} = (z-a)^k g(z), \quad c_k \neq 0.$$

Поскольку функция $g(z)$ есть сумма степенного ряда, она по теореме 7.3 (стр. 52) аналитична в круге сходимости. (А сходится ряд $g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^m$, очевидно, в том же круге, что и ряд для $f(z)$.) При этом $g(a) = c_k \neq 0$. Поэтому $\frac{1}{g(z)}$ – также аналитична в некоторой окрестности точки $z = a$ (теорема 4.2, стр. 23), причём $\frac{1}{g(a)} = \frac{1}{c_k} \neq 0$.

По утверждению 9.2, функция

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^k} \cdot \frac{1}{g(z)}$$

имеет ту же особенность в точке $z = a$, что и функция $\frac{1}{(z-a)^k}$, то есть полюс порядка k .

2) Разложим $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z = a$. Так как $z = a$ – полюс порядка k функции $f(z)$, то её ряд Тейлора не содержит слагаемых со степенями выражения $(z - a)$, меньшими, чем $(-k)$:

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n(z-a)^n = \frac{1}{(z-a)^k} \cdot \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} c_{m-k}(z-a)^m}_{g(z)} = (z-a)^k g(z), \quad c_{-k} \neq 0.$$

Аналогично пункту 1) этого доказательства, функция $g(z)$ и аналитична окрестности $z = a$. При этом $g(a) = c_{-k} \neq 0$. Поэтому $\frac{1}{g(z)}$ – также аналитична в некоторой окрестности точки $z = a$, причём $\frac{1}{g(a)} = \frac{1}{c_k} \neq 0$.

Пусть в окрестности $z = a$ функция $\frac{1}{g(z)}$ разложена в ряд Тейлора:

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n, \quad b_0 = \frac{1}{c_{-k}} \neq 0.$$

Тогда ряд Тейлора для

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^k \cdot \frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^{n+k} = [m = n+k] = \sum_{m=k}^{\infty} b_{m-k}(z-a)^m.$$

Это и означает, что $\frac{1}{f(z)}$ имеет в $z = a$ нуль порядка k . □

Пример 9.8. У функции $f(z) = 1 - \cos z$ в точке $z = 0$ нуль второго порядка:

$$f(z) = 1 - \cos z = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = [m = n-1] = z^2 \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} z^{2m}}{(2m+2)!}.$$

Поэтому, по утверждению 9.3, функция $\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{1-\cos z}$ в $z = 0$ имеет полюс порядка 2.

Обобщим последнее утверждение.

Утверждение 9.4.

Усл. $z = a$ – нуль порядка k функции $f(z)$ и нуль порядка m функции $g(z)$.

Утв.

1) функция $f(z) \pm g(z)$ имеет в $z = a$ нуль порядка $\min\{k, m\}$, ($m \neq k$);

2) функция $f(z) \cdot g(z)$ имеет в $z = a$ нуль порядка $k + m$;

3) функция $\frac{f(z)}{g(z)}$ имеет в $z = a$ $\begin{cases} \text{полюс порядка } m - k & \text{при } k < m; \\ \text{УОТ} & \text{при } k = m; \\ \text{нуль порядка } k - m & \text{при } k > m. \end{cases}$

(Нуль порядка $(k-m)$ получится, только если доопределить $\frac{f(z)}{g(z)}$ нулём в точке $z = a$.)

Доказательство. Разложим $f(z)$ и $g(z)$ в ряд Тейлора в окрестности $z = a$. Так как $z = a$ – нуль порядка k функции $f(z)$, то её ряд Тейлора не содержит слагаемых со степенями выражения $(z-a)$, меньшими, чем k :

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n = (z-a)^k \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} c_{l+k}(z-a)^l}_{\varphi(z)} = (z-a)^k \varphi(z), \quad \varphi(a) = c_k \neq 0.$$

Поскольку функция $\varphi(z)$ есть сумма степенного ряда, она по теореме 7.3 (стр. 52) аналитична в круге сходимости. (А сходится ряд $\varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^m$, очевидно, в том же круге, что и ряд для $f(z)$.) Аналогично, для $g(z)$ справедливо представление

$$g(z) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n(z-a)^n = (z-a)^m \underbrace{\sum_{l=0}^{\infty} c_{l+m}(z-a)^l}_{\psi(z)} = (z-a)^m \psi(z), \quad \psi(a) = b_m \neq 0.$$

1)

$$f(z) \pm g(z) = (z-a)^k \varphi(z) \pm (z-a)^m \psi(z) = \begin{cases} (z-a)^k (\varphi(z) \pm (z-a)^{m-k} \psi(z)) & \text{при } k < m; \\ (z-a)^m ((z-a)^{k-m} \varphi(z) \pm \psi(z)) & \text{при } k > m. \end{cases}$$

В обоих случаях выражение, стоящее в скобках, есть аналитическая функция, не обращающаяся в нуль в $z = a$, поэтому в первом случае $f(z) \pm g(z)$ имеет в $z = a$ нуль порядка k , а во втором – нуль порядка m .

2)

$$f(z) \cdot g(z) = (z-a)^k \varphi(z) \cdot (z-a)^m \psi(z) = (z-a)^{k+m} \varphi(z) \psi(z).$$

Так как $\varphi(z)\psi(z)$ – аналитическая функция, не обращающаяся в нуль в $z = a$, то $f(z) \cdot g(z)$ имеет в $z = a$ нуль порядка $k + m$.

3)

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(z-a)^k \varphi(z)}{(z-a)^m \psi(z)} = \frac{1}{(z-a)^{m-k}} \cdot \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Поскольку $\psi(z)$ – аналитична и $\psi(a) \neq 0$, то $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ – также аналитична в некоторой окрестности точки $z = a$. При этом $\frac{\varphi(a)}{\psi(a)} \neq 0$. Поэтому при $m > k$ функция $\frac{f(z)}{g(z)}$ имеет в $z = a$ полюс порядка $(m - k)$, при $m = k$ – УОТ, а при $k > m$ – нуль порядка $(k - m)$ (см. определение 7.1, стр. 56, нуля порядка k и утверждения 9.2 и 9.3, стр. 70 и 71). \square

Пример 9.9. Классифицировать изолированные особые точки функции

$$h(z) = \frac{e^z - 1}{\operatorname{sh}^2 3z}$$

Функции, стоящие в числителе и знаменателе данной дроби, аналитичны всюду в \mathbb{C} , поэтому особенности могут быть только в точках, в которых знаменатель обращается в нуль. В силу свойства функции $\operatorname{sh} z$ (стр. 21)

$$\operatorname{sh} 3z = 0 \quad \iff \quad z = a_n = \frac{i\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Чтобы узнать порядок нуля, стоящего в знаменателе, при $z = a_n$, разложим $\operatorname{sh} 3z$ в ряд Тейлора в окрестности $z = a_n$:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 3z &= [\zeta = z - a_n] = \operatorname{sh} (3(\zeta + a_n)) = \operatorname{sh} 3\zeta \operatorname{ch} 3a_n + \operatorname{ch} 3\zeta \operatorname{sh} 3a_n = \\ &= \begin{bmatrix} \operatorname{ch} 3a_n = 1, \\ \operatorname{sh} 3a_n = 0, \end{bmatrix} \text{ см. свойства 16, 18, 20, стр. 21} = \operatorname{sh} 3\zeta = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!} \zeta^{2k+1} = \zeta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!} \zeta^{2k} = \zeta \varphi(\zeta), \quad \varphi(0) \neq 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi(\zeta)$ аналитична (как сумма степенного ряда, см. стр. 52) в окрестности $\zeta = 0$ и не обращается в этой точке в нуль, то функция

$$\operatorname{sh}^2 3z = (z - a_n)^2 \varphi^2(z - a_n)$$

имеет в $z = a_n$ нуль порядка 2. Отсюда, в силу утверждения 9.3 (стр. 71),

$$z = a_n \text{ — полюса порядка 2 функции } \frac{1}{\operatorname{sh} 3z}$$

Однако, чтобы выяснить, являются ли эти точки полюсами порядка 2 для функции $h(z) = \frac{1-e^z}{\operatorname{sh}^2 3z}$, нам надо проверить, не обращается ли в нуль числитель в этих точках. Решим уравнение

$$e^z = 1.$$

Так как $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$, то равенство $e^z = 1$ возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} e^x \cos y = 1, \\ e^x \sin y = 0, \end{cases} \quad \text{что возможно только при} \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = y_k = 2\pi k. \end{cases}$$

Таким образом, числитель имеет нули в точках

$$z = b_k = 2\pi ki, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Легко заметить, что некоторые из точек a_n совпадают с b_k , а именно

$$a_n = b_k = 2\pi ki, \quad \text{при } n = 6k \quad \text{и} \quad a_n \neq b_k, \quad \text{при остальных } n \text{ и любых } k.$$

Поэтому можно сразу сделать вывод, что

$$\text{в точках } z = \frac{i\pi n}{3}, \quad n \not\equiv 0 \pmod{6}, \quad h(z) \text{ имеет полюс порядка } 2.$$

Чтобы выяснить характер особенности в оставшихся точках $z = a_{3k} = b_k = 2\pi ki$, нам придётся узнать, какого порядка нули в этих точках у числителя. Разложим его в ряд Тейлора в окрестности $z = b_k$:

$$\begin{aligned} e^z - 1 &= [\zeta = z - b_k] = e^{\zeta + b_k} = e^\zeta \cdot e^{2\pi ki} - 1 = e^\zeta \cdot 1^k - 1 = e^\zeta - 1 = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\zeta^m}{m!} - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta^m}{m!} = \zeta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta^{m-1}}{m!} = \zeta \varphi(\zeta), \quad \varphi(0) \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, точки $z = b_k = 2\pi ki$ являются нулями порядка 1 числителя. По утверждению 9.4 (стр. 72), функция

$$h(z) = \frac{1 - e^z}{\operatorname{sh}^2 3z} \text{ имеет в точках } z = 2\pi ki \text{ полюса порядка } 2 - 1 = 1.$$

Итак, точки $z = \frac{i\pi n}{3}$, $n \not\equiv 0 \pmod{6}$ являются полюсами порядка 2, а точки $z = 2\pi ki$ — полюсами порядка 1.

Утверждение 9.5.

Усл. $z = a$ — полюс порядка k функции $f(z)$ и полюс порядка m функции $g(z)$.

Утв.

- 1) функция $f(z) \pm g(z)$ имеет в $z = a$ полюс порядка $\max\{k, m\}$, ($m \neq k$);
- 2) функция $f(z) \cdot g(z)$ имеет в $z = a$ полюс порядка $k + m$;

$$3) \text{ функция } \frac{f(z)}{g(z)} \text{ имеет в } z = a \begin{cases} \text{нуль порядка } m - k & \text{при } k < m; \\ \text{УОТ} & \text{при } k = m; \\ \text{полюс порядка } k - m & \text{при } k > m. \end{cases}$$

(Нуль порядка $(m-k)$ получится, только если доопределить $\frac{f(z)}{g(z)}$ нулём в точке $z = a$.)

Доказательство. В силу утверждения 9.3, стр. 71, функция $f_1(z) = \frac{1}{f(z)}$ имеет в точке $z = a$ нуль порядка k , а функция $g_1(z) = \frac{1}{g(z)}$ – нуль порядка m . Применим к функциям $f_1(z)$ и $g_1(z)$ утверждение 9.4, стр. 72, и получим пункты 2) и 3) данного утверждения.

Чтобы доказать пункт 1), рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} f \pm g &= \frac{1}{f_1} \pm \frac{1}{g_1} = \frac{g_1 \pm f_1}{f_1 g_1} = [\text{утверждение 9.4, стр. 72}] = \frac{\text{НП} \min\{k, m\}}{\text{НП}(k+m)} = \\ &= [\text{утверждение 9.4}] = \text{ПП}(k+m - \min\{k, m\}) = \text{ПП}(\max\{k, m\}). \end{aligned}$$

□

Утверждение 9.6.

Усл. $z = a$ – полюс порядка k функции $f(z)$, а функция $g(z) = e^f(z)$, или $g(z) = \sin f(z)$, или $g(z) = \cos f(z)$, или $g(z) = \text{sh} f(z)$, или $g(z) = \text{ch} f(z)$.

Утв. $g(z)$ имеет в точке $z = a$ существенно особую точку. Другими словами,

$$e^{\text{ПП}k} = \text{СОТ}, \quad \sin(\text{ПП}k) = \text{СОТ}, \quad \cos(\text{ПП}k) = \text{СОТ}, \quad \text{sh}(\text{ПП}k) = \text{СОТ}, \quad \text{ch}(\text{ПП}k) = \text{СОТ}.$$

Доказательство. Рассмотрим $e^{f(z)}$. Поскольку $f(z)$ имеет в $z = a$ ПП k , то в окрестности $z = a$ её можно представить в виде

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^k}, \quad \text{где } \varphi(z) \text{ – аналитична и } \varphi(a) \neq 0.$$

Тогда

$$e^{f(z)} = e^{\frac{1}{(z-a)^k}} \cdot e^{\varphi(z)}.$$

При этом $e^{\varphi(z)}$, как композиция аналитических функций, также аналитическая функция, к тому же не обращающаяся в нуль в $z = a$.

Ряд Лорана в окрестности $z = a$ функции $e^{\frac{1}{(z-a)^k}}$ имеет вид

$$e^{\frac{1}{(z-a)^k}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(z-a)^{kn}},$$

откуда, в силу наличия в этом ряде Лорана бесконечного числа ненулевых слагаемых с отрицательными степенями выражения $(z-a)$, получаем, что $z = a$ есть СОТ функции $e^{\frac{1}{(z-a)^k}}$.

Наконец, поскольку $e^{f(z)} = e^{\frac{1}{(z-a)^k}} \cdot e^{\varphi(z)}$, а $e^{\varphi(z)}$ – аналитическая функция в окрестности точки $z = a$, то по утверждению 9.2, стр. 70, $z = a$ – СОТ функции $e^{f(z)}$.

Для функций $\sin f(z)$, $\cos f(z)$, $\text{sh} f(z)$, $\text{ch} f(z)$ доказательство совершенно аналогично, поскольку $\sin \frac{1}{(z-a)^k}$, $\cos \frac{1}{(z-a)^k}$, $\text{sh} \frac{1}{(z-a)^k}$, $\text{ch} \frac{1}{(z-a)^k}$ раскладываются в аналогичные ряды

$$\sin \frac{1}{(z-a)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{(z-a)^{k(2n+1)}};$$

$$\cos \frac{1}{(z-a)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(z-a)^{2kn}};$$

$$\text{sh} \frac{1}{(z-a)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{(z-a)^{k(2n+1)}};$$

$$\operatorname{ch} \frac{1}{(z-a)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(z-a)^{2kn}}$$

с бесконечным числом ненулевых слагаемых с отрицательными степенями выражения $(z-a)$. □

Утверждение 9.7.

- 1) $z = a$ – УОТ $f(z)$ и ППк $g(z) \Rightarrow f(z) \pm g(z)$ и $f(z) \cdot g(z)$ имеют в $z = a$ ППк;
- 2) $z = a$ – УОТ $f(z)$ и СОТ $g(z) \Rightarrow f(z) \pm g(z)$ и $f(z) \cdot g(z)$ имеют в $z = a$ СОТ;
- 3) $z = a$ – ППк $f(z)$ и СОТ $g(z) \Rightarrow f(z) \pm g(z)$ и $f(z) \cdot g(z)$ имеют в $z = a$ СОТ.

Доказательство. С точки зрения рядов Лорана УОТ ничем не отличается от регулярных точек (то есть точек, где функция аналитична). Поэтому для пунктов 1) и 2) дословно переписываются доказательства пунктов 2) и 3) утверждения 9.2, стр. 70 и доказательство утверждения 9.1, стр. 69.

Разберём случай 3). В силу теоремы Сохоцкого – Вейерштрасса (стр. 67) не существует предела (ни конечного, ни бесконечного) функции $g(z)$ при $z \rightarrow a$. С другой стороны (стр. 67),

$$\exists \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty.$$

Поэтому из свойств пределов следует, что для $f(z) \pm g(z)$ и $f(z) \cdot g(z)$ не существует предела при $z \rightarrow a$ (ни конечного, ни бесконечного). Следовательно, $z = a$ – не УОТ и не полюс этих функций (теорема 9.1, стр. 66, и теорема 9.3, стр. 67). А поскольку $z = a$ – изолированная особая точка $f \pm g$ и $f \cdot g$, то она может быть только СОТ. □

Мы доказали много простых свойств изолированных особых точек. Сведём их в две наглядные таблицы. Первая посвящена композиции аналитической функции g и функции f , имеющей особую точку.

	$\frac{1}{f(z)}$	$e^{f(z)}$	$\sin(f(z))$	$\cos(f(z))$	$\operatorname{sh}(f(z))$	$\operatorname{ch}(f(z))$	$g(f(z))$
ППк	ППк	1	ППк	1	ППк	1	$g(0)$
УОТ	УОТ	УОТ	УОТ	УОТ	УОТ	УОТ	УОТ
ППк	ППк	СОТ	СОТ	СОТ	СОТ	СОТ	? ²
СОТ	СОТ	СОТ	СОТ	СОТ	СОТ	СОТ	СОТ ³

²⁾ Тут возможны различные варианты в зависимости от функции $g(w)$.

³⁾ Это верно, если $g(w)$ аналитична в \mathbb{C} и отлична от константы.

Вторая таблица даёт результаты арифметических операций с функциями, имеющими особые точки.

$f(z) \pm g(z)$	$f(z) \cdot g(z)$	$\frac{f(z)}{g(z)}$
$PT \pm YOT = YOT$	$PT \cdot YOT = YOT$	$\frac{PT}{YOT} = YOT$
$PT \pm ППk = ППk$	$PT \cdot ППk = ППk$	$\frac{PT}{ППk} = НПk$
$PT \pm COT = COT$	$PT \cdot COT = COT$	$\frac{PT}{COT} = COT$
$YOT \pm YOT = YOT$	$YOT \cdot YOT = YOT$	$\frac{YOT}{YOT} = YOT$
$YOT \pm ППk = ППk$	$YOT \cdot ППk = ППk$	$\frac{YOT}{ППk} = НПk$
$YOT \pm COT = COT$	$YOT \cdot COT = COT$	$\frac{YOT}{COT} = COT$
$ППm \pm YOT = ППm$	$PT \cdot YOT = YOT$	$\frac{PT}{YOT} = YOT$
$ППm \pm ППk =$ $= ПП \max\{m, k\}, m \neq k$	$ППm \cdot ППk = ПП(m + k)$	$\frac{ППm}{ППk} = \begin{cases} НП(k - m)^4 & \text{при } m < k; \\ YOT & \text{при } m = k; \\ ПП(m - k) & \text{при } m > k; \end{cases}$
$ППm \pm COT = COT$	$ППm \cdot COT = COT$	$\frac{ППm}{COT} = COT$
$COT \pm YOT = COT$	$COT \cdot YOT = COT$	$\frac{COT}{YOT} = COT$
$COT \pm ППk = COT$	$COT \cdot ППk = COT$	$\frac{COT}{ППk} = COT$
$COT \pm COT = COT^5$	$COT \cdot COT = COT$	$\frac{COT}{COT} = COT$

Заметим, что доказанные выше утверждения 9.1 – 9.7 (стр. 69, 70, 71, 72, 74, 75, 76) охватывают не все приведённые в таблицах результаты. Заинтересованному читателю предоставляется самому доказать остальные результаты.

4) Верно, если доопределить $\frac{f(z)}{g(z)}$ нулём в точке $z = a$. В противном случае останется YOT.

5) Все результаты последней строчки верны, только если особенности не сократятся. Например, если $f = e^{\frac{1}{z}}$, а $g = ze^{\frac{1}{z}}$, то $y = \frac{f}{g}$ в точке $z = a$ будет не COT, а ПП1.

10. Вычеты в изолированных особых точках

10.1. Определение и формулы вычисления вычета

Пусть $z = a$ – изолированная особая точка однозначной аналитической функции $f(z)$. Тогда в окрестности этой точки функция $f(z)$ может быть представлена рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < R,$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}} d\zeta$ и, в частности,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta.$$

Опр. 10.1. Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = a$ называется число, равное:

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta = c_{-1},$$

где интеграл берётся в положительном направлении по произвольному замкнутому контуру C , охватывающему точку $z = a$.

10.1.1. Вычет в устранимой особой точке

Если $z = a$ – устранимая особая точка (или вообще не особая), то $\operatorname{Res} f(a) = 0$ в силу того факта, что ряд Лорана (он же – ряд Тейлора) функции $f(z)$ в окрестности $z = a$ не содержит слагаемых с отрицательными степенями $(z-a)$, в том числе и слагаемого с $(z-a)^{-1}$.

10.1.2. Вычет в полюсе первого порядка

Пусть $z = a$ – полюс первого порядка $f(z)$. Тогда ряд Лорана $f(z)$ в окрестности $z = a$ имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

Умножим обе части на $(z-a)$ и перейдём в полученном равенстве к пределу при $z \rightarrow a$:

$$\operatorname{Res} f(a) = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z-a)f(z). \quad (10.1)$$

Есть и другая формула для вычисления вычета в полюсе первого порядка.

Пусть

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \varphi(a) \neq 0,$$

а $\psi(z)$ имеет в $z = a$ нуль первого порядка, то есть представима в виде

$$\psi(z) = (z-a)\psi'(a) + \frac{\psi''(a)}{2}(z-a)^2 + \dots, \quad \psi'(a) \neq 0.$$

Тогда $(z-a)f(z) = (z-a) \frac{\varphi(z)}{(z-a)\psi'(a) + \frac{\psi''(a)}{2}(z-a)^2 + \dots} = \frac{\varphi(z)}{\psi'(a) + \frac{\psi''(a)}{2}(z-a) + \dots}$ и переходя к пределу при $z \rightarrow a$, по формуле (10.1) получим:

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}, \quad f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}. \quad (10.2)$$

10.1.3. Вычет в полюсе порядка k

Пусть точка a является полюсом порядка k функции $f(z)$. Это значит, что её ряд Лорана в окрестности данной точки имеет вид:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots$$

Умножив обе части на $(z-a)^k$, получим:

$$(z-a)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z-a) + \dots + c_{-2}(z-a)^{k-2} + c_{-1}(z-a)^{k-1} + \dots$$

Возьмём от обеих частей производную порядка $(k-1)$, чтобы обнулить все слагаемые от c_{-k} до $c_{-2}(z-a)^{k-2}$ и перейдём в полученном равенстве к пределу при $z \rightarrow a$, чтобы обнулились все слагаемые, начиная с c_0 . Получим:

$$\operatorname{Res} f(a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z-a)^k f(z)], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (10.3)$$

Как легко заметить, формула (10.1) является частным случаем (10.3) при $k = 1$.

10.1.4. Вычет в существенно особой точке

Для вычета в существенно особой точке простых формул нет. Поэтому его надо считать либо по определению, как интеграл, либо при помощи разложения в ряд Лорана, чтобы найти c_{-1} .

10.1.5. Вычет в $z = \infty$

Несколько забегаая вперёд, приведём определение и формулы для вычисления вычета в точке $z = \infty$.

Опр. 10.2. Вычетом функции $f(z)$ в изолированной особой точке $z = \infty$ называется **число**, равное:

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta = -c_{-1},$$

где интеграл берётся в положительном направлении по произвольному замкнутому контуру C , во внешности которого нет других особых точек, а c_{-1} – коэффициент при z^{-1} ряда Лорана функции $f(z)$ в кольце $\{r < |z| < \infty\}$.

Для вычисления вычета в точке $z = \infty$ есть три способа:

первый:

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} [-zf(z)], \quad \text{если этот предел существует;} \quad (10.4)$$

второй: разложить функцию в ряд Лорана в любом кольце $\{r < |z| < \infty\}$ и взять коэффициент c_{-1} с обратным знаком;

третий: воспользоваться основной теоремой о вычетах (см. следующий пункт).

10.2. Основная теорема о вычетах и следствие из неё

Теорема 10.1 (Основная теорема о вычетах).

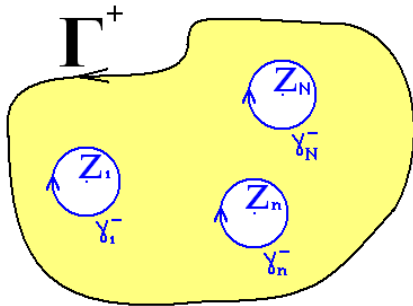
Усл. $f(z)$ аналитична в области $G \supset D$ всюду, за исключением конечного числа изолированных особых точек $\{a_n\}_{n=1}^{n=N}$, лежащих строго внутри D .

Утв.

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{n=N} \text{Res } f(a_n),$$

где Γ^+ есть граница области D , проходимая в положительном направлении.

Доказательство.



Вырежем каждую из особых точек a_n замкнутым контуром γ_n так, чтобы он не пересекал ни Γ^+ , ни другие контуры γ_k . Рассмотрим многосвязную область D^* , ограниченную контурами Γ^+ и γ_n , $n = 1, 2, \dots, N$. Внутри указанной области функция $f(z)$ не имеет особых точек, то есть она везде аналитична, в том числе и на границе ∂D^* этой области.

Поэтому, по Интегральной Теореме Коши (стр. 41), интеграл от $f(z)$ по ∂D^* , проходимой в положительном направлении, равен нулю.

$$\oint_{\partial D^*} f(z) dz = 0.$$

А из чего состоит граница ∂D^* ? Из контура Γ^+ и объединения контуров γ_n^- , проходимых по часовой стрелке.

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz + \sum_{n=1}^N \oint_{\gamma_n^-} f(z) dz = 0.$$

Перенеся теперь сумму интегралов по γ_n^- в правую часть и поменяв направление обхода на положительное, получим

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = \sum_{n=1}^N \oint_{\gamma_n^+} f(z) dz. \quad (10.5)$$

А так как $\oint_{\gamma_n^+} f(z) dz = 2\pi i \text{Res } f(a_n)$, то утверждение теоремы доказано. \square

Теперь предположим, что за пределами односвязной области D функция $f(z)$ не имеет особенностей, тогда определен вычет $f(z)$ в точке $z = \infty$:

$$\text{Res } f(\infty) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^+} f(\zeta) d\zeta = -c_{-1}.$$

Поэтому формулу (10.5) можно переписать в виде:

$$-2\pi i \text{Res } f(\infty) = \sum_{n=1}^N \oint_{\gamma_n^+} f(z) dz$$

или

$$2\pi i \operatorname{Res} f(\infty) + 2\pi i \sum_{n=1}^{n=N} \operatorname{Res} f(a_n) = 0.$$

Этот результат сформулируем в виде теоремы:

Теорема 10.2.

Усл. $f(z)$ аналитична всюду в \mathbb{C} , за исключением конечного числа изолированных особых точек $\{a_n\}_{n=1}^{n=N}$ и точки $a_0 = \infty$.

Утв.

$$\sum_{n=0}^{n=N} \operatorname{Res} f(a_n) = 0.$$

11. Вычисление интегралов с помощью вычетов и леммы Жордана

11.1. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов

Пример 11.1. Вычислить интеграл: $I = \oint_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z(z-1)^2(z-3)^3}$.

Заметим, в первую очередь, что внутрь контура интегрирования попадают только 2 особые точки подынтегральной функции: $z_0 = 0$ и $z_1 = 1$, поскольку $z_2 = 3$ лежит во внешности контура $C = \{|z| = 2\}$. Поэтому, в силу основной теоремы о вычетах,

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2(z-3)^3} dz = 2\pi i (\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(1)).$$

Вычислим вычеты. Очевидно, $z_0 = 0$ – полюс первого порядка, а $z_1 = 1$ – полюс порядка 2. Поэтому, по формулам (10.1) и (10.3), получаем:

$$\operatorname{Res} f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{(z-1)^2(z-3)^3} = \frac{e^0}{(0-1)^2(0-3)^3} = -\frac{1}{27};$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(1) &= \frac{1}{1} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} [(z-1)^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^z}{z(z-3)^3} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z (z(z-3)^3 - (z-3)^3 - 3z(z-3)^2)}{z^2(z-3)^6} = \frac{e(-8+8-12)}{1^2(-2)^6} = -\frac{3e}{16}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-1)^2(z-3)^3} dz = 2\pi i (\operatorname{Res} f(0) + \operatorname{Res} f(1)) = 2\pi i \left(-\frac{1}{27} - \frac{3e}{16} \right) = -\pi i \frac{16+81e}{216}.$$

11.2. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$. Лемма Жордана

Лемма 11.1 (Жордан).

Усл. 1) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $\{a_n\}_{n=1}^{n=N}$.

2) $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $\text{Im } z > 0$ равномерно относительно $\arg z$.

Утв. При $a > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz = 0,$$

где $C_R = \{z : |z| = R, \arg z \in (0, \pi)\}$ – дуга окружности с центром в $z = 0$ и радиусом R в верхней полуплоскости.

Доказательство. Нам дано, что $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $\text{Im } z > 0$ равномерно относительно $\arg z$. Это означает, что при $|z| = R$ имеет место оценка

$$|f(z)| < \mu(R), \quad |z| = R,$$

где $\mu(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$. Кроме этой оценки нам потребуется очевидное соотношение

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi \quad \text{при } \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

В исследуемом интеграле сделаем замену $z = Re^{i\varphi}$ и оценим его с учетом этих неравенств.

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} e^{iaz} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{iaRe^{i\varphi}} f(Re^{i\varphi}) Re^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \int_0^\pi |e^{iaRe^{i\varphi}}| |f(Re^{i\varphi})| \cdot R |e^{i\varphi}| d\varphi < \\ &< \left[|e^{iaRe^{i\varphi}}| = |e^{iaR \cos \varphi - aR \sin \varphi}| = e^{-aR \sin \varphi} |e^{iaR \cos \varphi}| = e^{-aR \sin \varphi} \cdot 1 \right] < \\ &< \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} \cdot \mu(R) \cdot R \cdot 1 d\varphi = 2R\mu(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \varphi} d\varphi \leq \left[\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi \Rightarrow e^{-aR \sin \varphi} \leq e^{-\frac{2aR\varphi}{\pi}} \right] \leq \\ &\leq 2R\mu(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR\varphi}{\pi}} d\varphi = \frac{\pi\mu(R)}{a} (1 - e^{-aR}) \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

□

Пример 11.2. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + a^2} dx$, $\alpha > 0$, $a > 0$. В силу формулы

$$\text{Эйлера, } I = \text{Re } I_1 = \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + a^2} dx.$$

Рассмотрим функцию комплексной переменной $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{(z+ia)(z-ia)}$. Она удовлетворяет требованиям Леммы Жордана:

1) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $\{a_n\}_{n=1}^{n=N}$. В данном случае особая точка в верхней полуплоскости только одна $z_1 = ia$, и она является полюсом первого порядка.

2) $f(z) \Rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $\text{Im } z > 0$ равномерно относительно $\text{arg } z$.

Поэтому

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + a^2} dz = 0.$$

Представим искомый интеграл I_1 в виде:

$$I_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{C^R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + a^2} dz - \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + a^2} dz \right),$$

где C^R – замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси $[-R, R]$ и полуокружности C_R . При достаточно больших R интеграл по замкнутому контуру можно вычислить по основной теореме о вычетах: пусть $F(z) = e^{i\alpha z} f(z)$, тогда:

$$\int_{C^R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \text{Res}(F(ia)) = 2\pi i \left. \frac{(z - ia)e^{i\alpha z}}{(z - ia)(z + ia)} \right|_{z=ia} = 2\pi i \frac{e^{-\alpha a}}{2ia} = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}.$$

Поэтому

$$I_1 = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{C^R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + a^2} dz - \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + a^2} dz \right) = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a} - 0 = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}.$$

И, наконец, т.к. $I = \text{Re } I_1$, то $I = \text{Re} \left(\frac{\pi}{a} e^{-\alpha a} \right) = \frac{\pi}{a} e^{-\alpha a}$.

Замечание 11.1. Действуя аналогично решению данного примера, при $\alpha \geq 0$ получим формулы:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha x f(x) dx = \text{Re} \left(2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}(F(a_n)) \right), \quad \text{где } F(z) = e^{i\alpha z} f(z);$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \alpha x f(x) dx = \text{Im} \left(2\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}(F(a_n)) \right), \quad \text{где } F(z) = e^{i\alpha z} f(z).$$

Если $f(x)$ – чётная функция, то

$$I = \int_0^{+\infty} \cos \alpha x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha x f(x) dx = \text{Re} \left(\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}(F(a_n)) \right), \quad \text{где } F(z) = e^{i\alpha z} f(z);$$

Если $f(x)$ – нечётная функция, то

$$I = \int_0^{+\infty} \sin \alpha x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \alpha x f(x) dx = \text{Im} \left(\pi i \sum_{n=1}^N \text{Res}(F(a_n)) \right), \quad \text{где } F(z) = e^{i\alpha z} f(z).$$

Здесь всюду сумма берётся по всем изолированным особым точкам, лежащим в верхней полуплоскости:

$$\text{Im } a_n > 0, \quad n = \overline{1, N}.$$

11.3. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$

Для данного типа интегралов можно построить аппарат, весьма похожий на Лемму Жордана и способ её применения.

Лемма 11.2.

Усл. 1) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $\{a_n\}_{n=1}^{n=N}$.

2) $zf(z) \Rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $\text{Im } z > 0$ равномерно относительно $\text{arg } z$.

Утв.

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0,$$

где $C_R = \{z : |z| = R, \text{arg } z \in (0, \pi)\}$ – дуга окружности с центром в $z = 0$ и радиусом R в верхней полуплоскости.

Доказательство. Нам дано, что $zf(z) \Rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $\text{Im } z > 0$ равномерно относительно $\text{arg } z$. Это означает, что при $|z| = R$ с достаточно большим R имеет место оценка

$$|f(z)| < \frac{M(R)}{R}, \quad |z| = R, \quad M(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Поэтому

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |f(z)| dl < \frac{M(R)\pi R}{R} = \pi M(R) \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

□

Пример 11.3. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1} dx$. Рассмотрим функцию комплексной переменной $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$. Она удовлетворяет требованиям Леммы 11.2:

1) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $\{a_n\}_{n=1}^{n=N}$. В данном случае особых точек в верхней полуплоскости только две: $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, и обе они являются полюсами первого порядка.

2) $zf(z) \Rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $\text{Im } z > 0$ равномерно относительно $\text{arg } z$.

Поэтому

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{z^4+1} dz = 0.$$

Представим искомый интеграл I в виде:

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{C^R} \frac{dz}{z^4+1} - \int_{C_R} \frac{dz}{z^4+1} \right),$$

где C^R – замкнутый контур, состоящий из отрезка действительной оси $[-R, R]$ и полуокружности C_R . При достаточно больших R интеграл по замкнутому контуру можно вычислить по

основной теореме о вычетах:

$$\begin{aligned} \int_{CR} \frac{dz}{z^4 + 1} &= 2\pi i (\operatorname{Res}(f(z_1)) + \operatorname{Res}(f(z_2))) = \left[\text{по формуле (10.2)} \right] = \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_1} + \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_2} \right) = 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}} \right) = \frac{2\pi i}{4} \left(e^{-\frac{3\pi i}{4}} + e^{-\frac{9\pi i}{4}} \right) = \\ &= \frac{\pi i}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{9\pi}{4} - i \sin \frac{9\pi}{4} \right) = \frac{\pi i}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= -\frac{\pi i^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{\pi \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Поэтому

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{CR} \frac{dz}{z^4 + 1} - \int_{C_R} \frac{dz}{z^4 + 1} \right) = \frac{\pi \sqrt{2}}{2} - 0 = \frac{\pi \sqrt{2}}{2}.$$

Замечание 11.2. Действуя так же, как в последнем примере, легко получить формулы:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}(f(a_n));$$

Если $f(x)$ – чётная функция, то

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}(f(a_n)).$$

Здесь всюду сумма берётся по особым точкам функции $f(z)$, лежащим в верхней полуплоскости: $\operatorname{Im} a_n > 0$.

11.4. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ с полюсами на \mathbb{R}

Утверждение 11.1.

Усл. 1) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $\{a_n\}_{n=1}^{n=N}$.

2) $f(z)$ имеет конечное число изолированных особых точек $\{b_m\}_{m=1}^{m=M}$, $b_m \in \mathbb{R}$ на прямой \mathbb{R} , все из которых являются полюсами первого порядка.

3) $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im} z > 0$ равномерно относительно $\arg z$.

Утв. При $a > 0$

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iaz} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{n=1}^N \operatorname{Res}(F(a_n)) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \operatorname{Res}(F(b_m)) \right), \quad \text{где } F(z) = e^{iaz} f(z).$$

Доказательство. Рассмотрим контур $C = C_R \cup \bigcup_{m=1}^M C_r^{m-} \cup \bigcup_{m=0}^M \gamma_m$, где C_r^{m-} – верхняя половинка окружности радиуса r с центром в b_m , проходимая по часовой стрелке, а γ_m – отрезок прямой \mathbb{R} , примыкающий к C_r^{m-} слева. Внутри контура C при достаточно больших R содержатся все изолированные особые точки a_n функции $F(z)$, и по основной теореме о вычетах

$$\int_C F(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}(F(a_n)).$$

С другой стороны, при стремлении $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow +0$ в силу леммы Жордана получим, что левая часть данного равенства равна:

$$\int_C F(z) dz = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iaz} f(z) dz - \sum_{m=1}^M \lim_{r \rightarrow +0} \int_{C_r^{m+}} F(z) dz.$$

Отсюда,

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iaz} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{Res}(F(a_n)) + \sum_{m=1}^M \lim_{r \rightarrow +0} \int_{C_r^{m+}} F(z) dz.$$

Чтобы получить требуемую формулу, нам осталось вычислить $\lim_{r \rightarrow +0} \int_{C_r^{m+}} F(z) dz$. Учтем, что b_m – полюс первого порядка, т.е. имеет место представление

$$F(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z - b_m)^k = \frac{c_{-1}}{z - b_m} + c_0 + c_1(z - b_m) + \dots = \frac{g(z)}{z - b_m},$$

где $g(z)$ – аналитическая в окрестности b_m функция, причем $g(b_m) = c_{-1} = \operatorname{Res} F(b_m)$. Отсюда, в силу аналитичности, $g(z) = g(b_m) + O(z - b_m) = \operatorname{Res} F(b_m) + O(z - b_m)$, $z \rightarrow b_m$, и:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow +0} \int_{C_r^{m+}} F(z) dz &= [z = b_m + re^{i\varphi}] = \lim_{r \rightarrow +0} \int_0^\pi \frac{g(z) i r e^{i\varphi}}{r e^{i\varphi}} d\varphi = \\ &= [\text{так как } g(z) = \operatorname{Res} F(b_m) + O(r)] = \lim_{r \rightarrow +0} \left(\operatorname{Res} F(b_m) \int_0^\pi i d\varphi + \int_0^\pi i O(r) d\varphi \right) = \pi i \operatorname{Res} F(b_m). \end{aligned}$$

□

Совершенно аналогично доказывается

Утверждение 11.2.

Усл. 1) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $\{a_n\}_{n=1}^N$.

2) $f(z)$ имеет конечное число изолированных особых точек $\{b_m\}_{m=1}^M$, $b_m \in \mathbb{R}$ на прямой \mathbb{R} , все из которых являются полюсами первого порядка.

3) $z f(z) \Rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im} z > 0$ равномерно относительно $\arg z$.

Утв.

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{n=1}^N \operatorname{Res}(f(a_n)) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \operatorname{Res}(f(b_m)) \right).$$

Пример 11.4. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x(x^2+a^2)} dx$, $\alpha > 0$, $a > 0$. В силу формулы Эйлера, $I = \operatorname{Re} I_1 = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x(x^2+a^2)} dx$.

Рассмотрим функцию комплексной переменной $f(z) = \frac{1}{z(z^2+a^2)} = \frac{1}{z(z+ia)(z-ia)}$. Она удовлетворяет требованиям утверждения 11.1 (стр. 85):

1) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $\{a_n\}_{n=1}^{n=N}$. В данном случае особая точка в верхней полуплоскости только одна $z_1 = ia$, которая является полюсом первого порядка.

2) $f(z)$ имеет конечное число изолированных особых точек $\{b_m\}_{m=1}^{m=M}$, $b_m \in \mathbb{R}$ на прямой \mathbb{R} , все из которых являются полюсами первого порядка. В нашем случае – это единственная точка $b_1 = 0$.

3) $f(z) \Rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im} z > 0$ равномерно относительно $\arg z$.

Поэтому

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+a^2)} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(F(ia)) + \frac{1}{2} \operatorname{Res}(F(0)) \right), \quad \text{где } F(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2+a^2)}.$$

Найдем требуемые вычеты. По формуле (10.1) (стр. 78) имеем:

$$\operatorname{Res}(F(ia)) = \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) \frac{e^{iaz}}{z(z+ia)(z-ia)} = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{e^{iaz}}{z(z+ia)} = \frac{e^{-\alpha a}}{-2a^2};$$

$$\operatorname{Res}(F(0)) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{e^{iaz}}{z(z^2+a^2)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iaz}}{(z^2+a^2)} = \frac{1}{a^2}.$$

Итак,

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+a^2)} dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(F(ia)) + \frac{1}{2} \operatorname{Res}(F(0)) \right) = 2\pi i \left(\frac{e^{-\alpha a}}{-2a^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a^2} \right) = \frac{\pi i (1 - e^{-\alpha a})}{a^2}.$$

Наконец, искомым интеграл:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x(x^2+a^2)} dx = \operatorname{Re} \left(\frac{\pi i (1 - e^{-\alpha a})}{a^2} \right) = 0.$$

Пример 11.5. Вычислить интеграл $I = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x(x-a)} dx$, $a > 0$.

Рассмотрим функцию комплексной переменной $f(z) = \frac{1}{z(z-a)}$. Она удовлетворяет требованиям утверждения 11.2 (стр. 86):

1) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $\{a_n\}_{n=1}^{n=N}$. В данном случае особых точек в верхней полуплоскости вообще нет.

2) $f(z)$ имеет конечное число изолированных особых точек $\{b_m\}_{m=1}^{m=M}$, $b_m \in \mathbb{R}$ на прямой \mathbb{R} , все из которых являются полюсами первого порядка. В нашем случае – это точки $b_1 = 0$ и $b_2 = a > 0$.

3) $zf(z) \Rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $\text{Im } z > 0$ равномерно относительно $\arg z$.
Поэтому

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z(z-a)} = 2\pi i \left(\frac{1}{2} \text{Res}(f(0)) + \frac{1}{2} \text{Res}(f(a)) \right).$$

Найдем требуемые вычеты. По формуле (10.1) (стр. 78) имеем:

$$\text{Res}(f(0)) = \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{1}{z(z-a)} = -\frac{1}{a};$$

$$\text{Res}(f(a)) = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) \frac{1}{z(z-a)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{z} = \frac{1}{a}.$$

Итак,

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{z(z-a)} = \pi i (\text{Res}(f(0)) + \text{Res}(f(a))) = \pi i \left(-\frac{1}{a} + \frac{1}{a} \right) = 0.$$

12. Операционное исчисление

12.1. Преобразование Лапласа. Свойства изображения

Опр. 12.1. Пусть функция $f(t)$ определена на всей числовой прямой $(-\infty, \infty)$. Тогда **показателем роста функции** $f(t)$ называется **число** $\alpha = \inf s$, равное точной нижней грани всех таких $s \in \mathbb{R}$, что: $\exists M \in \mathbb{R} : \forall t > 0$

$$|f(t)| \leq M e^{st}.$$

Опр. 12.2.

Через $\Lambda(\alpha)$ мы будем обозначать **множество функций**, имеющих следующие свойства:

- 1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
- 2) $f(t)$ имеет на каждом промежутке $[n, n+1)$ ($n \in \mathbb{Z}$) не более m точек разрыва, причем только первого рода (считается, что устранимые разрывы уже устранены);
- 3) $f(t)$ имеет степень роста – конечное число α .

Для всех функций $f(t)$ из $\Lambda(\alpha)$ имеет смысл (т.е. сходится) интеграл:

$$F(p) = \tilde{f} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad \text{Re } p > \alpha. \quad (12.1)$$

Опр. 12.3.

Интеграл $\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$ называется **преобразованием Лапласа функции $f(t)$** .

При этом **функция $F(p)$** , определенная по формуле (12.1) при $p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \alpha$, называется **изображением функции $f(t)$** , а **функция $f(t)$** называется **оригиналом функции $F(p)$** . И то, и другое обозначается так:

$$F(p) \doteq f(t), \quad f(t) \doteq F(p).$$

Теорема 12.1 (Об аналитичности изображения).

Усл. $f(t) \in \Lambda(\alpha)$

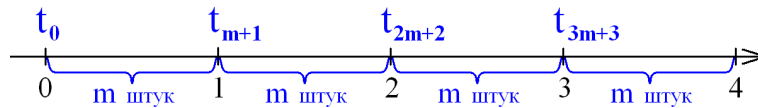
Утв. Изображение функции $f(t)$ является аналитической функцией комплексного переменного в полуплоскости $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Доказательство. Пусть возрастающая последовательность точек $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ состоит из всех неотрицательных целых чисел $\{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ и точек разрыва (I-го рода) функции $f(t)$.

1) Заметим, что при таком построении $\{t_k\}$ имеет место неравенство

$$t_k \geq \left[\frac{k}{m+1} \right] > \frac{k}{m+1} - 1 = \frac{k - (m+1)}{m+1}, \quad k \geq 0. \quad (12.2)$$

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим случай самого плотного расположения точек t_k – случай, когда на каждом промежутке $(n, n+1)$ находится ровно m точек разрыва $f(t)$. Поскольку $\{t_k\}$ содержит кроме этих точек разрыва ещё и целые неотрицательные числа, то на каждый полуинтервал $[n, n+1)$ попадёт ровно $m+1$ точка последовательности $\{t_k\}$, откуда



$$t_k = n \Leftrightarrow k = n(m+1) \text{ и}$$

$$t_k \in \left[\left[\frac{k}{m+1} \right]; \left[\frac{k}{m+1} \right] + 1 \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Из этого соотношения и следует (12.2) для самого "плотного" случая. Для остальных случаев, поскольку точки t_k будут располагать реже, то есть не на каждом единичном промежутке будет по m точек разрыва $f(t)$, оценка (12.2) будет тем более верна.

2) Разобьём интеграл (12.1) на сумму интегралов по отрезкам $[t_{k-1}, t_k]$.

$$\begin{aligned} F(p) &\equiv \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} e^{-pt} f(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-pt} f(t) dt + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-pt} f(t) dt + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-pt} f(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(p), \quad (12.3) \end{aligned}$$

где $u_k(p) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-pt} f(t) dt, \quad k \in \mathbb{N}.$

3) Перепишем утверждение 6.1 (стр. 45) в подходящем для данного случая виде:

Утверждение 12.1 (Аналитичность интеграла, зависящего от параметра).

Усл. $\varphi(p, t)$ аналитична по p и ограничена в односвязной области $D = \{\operatorname{Re} p > \alpha\}$.

При этом $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial p} \in C(D \times C)$. Контур $C = (t_{k-1}, t_k)$.

Утв. Функция $u(p) = \int_C \varphi(p, t) dt$ аналитична в D , причём $u'(p) = \int_C \frac{\partial \varphi(p, t)}{\partial p} dt$.

Поскольку интервал (t_{k-1}, t_k) по построению не содержит точек разрыва $f(t)$, и функция $|e^{-pt}| = |e^{-\operatorname{Re} p t}| \cdot |e^{-i \operatorname{Im} p t}| = |e^{-\operatorname{Re} p t}| < e^{-\alpha t}$ – ограничена на $D \times C \equiv \{\operatorname{Re} p > \alpha\} \times (t_{k-1}, t_k)$, то $\varphi(p, t) = e^{-pt} f(t)$ действительно является аналитичной по p и ограниченной в $D \times C$. Поэтому, в силу утверждения 12.1, каждый из интегралов $u_k(p)$ является аналитической функцией в $\operatorname{Re} p > \alpha$, и его можно дифференцировать под знаком интеграла.

4) Докажем равномерную сходимость ряда (12.3) в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s > s_0 > \alpha$ с произвольными константами $s > s_0 > \alpha$. Поскольку $\forall s_0 > \alpha$ выполнена оценка

$$|f(t)| \leq M e^{s_0 t},$$

то $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |u_k(p)| &= \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} |e^{-pt} f(t)| dt \leq M \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-st} e^{s_0 t} dt = \\ &= M \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{(s_0-s)t} dt = M \cdot \frac{e^{(s_0-s)t}}{s_0-s} \Big|_{t=t_{k-1}}^{t_k} = M \cdot \frac{e^{(s_0-s)t_k} - e^{(s_0-s)t_{k-1}}}{s_0-s} = \\ &= \left[M_1 = \frac{M}{s_0-s} \right] = M_1 (e^{(s_0-s)t_k} - e^{(s_0-s)t_{k-1}}) \leq M_1 e^{(s_0-s)t_k}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Таким образом, общий член ряда (12.3) равномерно в $\operatorname{Re} p > s > s_0 > \alpha$ мажорируется числом $M_1 e^{(s_0-s)t_k}$. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} M_1 e^{(s_0-s)t_k} = M_1 \sum_{k=1}^{\infty} e^{(s_0-s)t_k}$ сходится, например, по признаку Коши:

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{e^{(s_0-s)t_k}} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} e^{(s_0-s) \cdot \frac{t_k}{k}} < \left[\text{в силу (12.2)} \right] < \lim_{k \rightarrow \infty} e^{(s_0-s) \cdot \frac{k-(m+1) \cdot \frac{1}{k}}{m+1}} = e^{\frac{s_0-s}{m+1}} < 1.$$

Таким образом, в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s > s_0 > \alpha$ ряд (12.3) сходится равномерно по признаку Вейерштрасса (стр. 17).

5) Равномерно сходящийся ряд аналитических функций сходится к аналитической функции (теорема 7.2, стр. 51). Поэтому его сумма $F(p)$ аналитична в каждой полуплоскости $\operatorname{Re} p > s > s_0 > \alpha$. А поскольку числа $s > s_0 > \alpha$ можно выбирать произвольно, то аналитичность $F(p)$ имеет место всюду в $\operatorname{Re} p > \alpha$. \square

Утверждение 12.2 (Поведение изображения на бесконечности).

Усл. $f(t) \in \Lambda(\alpha)$, $F(p) \doteq f(t)$ в $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Утв. $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} F(p) = 0$.

Доказательство. Оценим $|F(p)|$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0 > \alpha$.

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-pt} f(t)| dt \leq M \int_0^{\infty} e^{-\operatorname{Re} p \cdot t} e^{s_0 t} dt = \\ &= M \int_0^{\infty} e^{(s_0 - \operatorname{Re} p) \cdot t} dt = M \cdot \frac{e^{(s_0 - \operatorname{Re} p) \cdot t}}{s_0 - \operatorname{Re} p} \Big|_{t=0}^{\infty} = M \cdot \frac{-1}{s_0 - \operatorname{Re} p} = M \cdot \frac{1}{\operatorname{Re} p - s_0} \xrightarrow{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

□

12.2. Свойства преобразования Лапласа

Свойства преобразования Лапласа Пусть $f(t) \doteq F(p)$. Тогда

- 1) $\sum_{k=1}^n c_k f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n c_k F_k(p), \quad c_k = \text{const};$
- 2) $f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right), \quad \lambda = \text{const} > 0;$
- 3) $f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0);$
- 4) $\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{1}{p} F(p);$
- 5) $f_1 * f_2 = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau \doteq F_1(p) \cdot F_2(p)$
(теорема Бореля о свёртке);
- 6) $F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t);$
- 7) $\int_p^{\infty} F(s) ds \doteq \frac{f(t)}{t};$
- 8) $F(p + \lambda) \doteq e^{-\lambda t} f(t)$ (теорема сдвига).

Доказательство. 1) сразу следует из свойства линейности интеграла.

$$2) \quad f(\lambda t) \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} f(\lambda t) dt = [x = \lambda t] = \int_0^{\infty} e^{-\frac{px}{\lambda}} f(x) \frac{dx}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\lambda} x} f(x) dx \equiv \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

3) Пусть $f(t) \doteq F(p)$ и возьмем сначала $n = 1$. Тогда:

$$\tilde{f}' = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt = [\text{по частям}] = e^{-pt} f(t) \Big|_{t=0}^{t=\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = -f(0) + pF(p).$$

Здесь мы воспользовались тем, что $|e^{-pt} f(t)| \leq M |e^{-pt}| e^{\alpha t} = M e^{(\alpha - \operatorname{Re} p)t} \cdot |e^{-i \operatorname{Im} p \cdot t}| = M e^{(\alpha - \operatorname{Re} p)t}$, откуда при всех $p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \alpha$ имеем: $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-pt} f(t) = 0$. Таким образом,

$$\tilde{f}' \doteq F_1(p) = pF(p) - f(0).$$

Но, аналогично рассуждая, для производной f'' функции f' , получим

$$\tilde{f}'' \doteq F_2(p) = pF_1(p) - f'(0) \equiv p^2 F(p) - p f(0) - f'(0).$$

Теми же рассуждениями мы за n шагов получим формулу для изображения функции $f^{(n)}$:

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \frac{1}{p} F(p) &= \int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{p} f(t) dt = \left[\text{по частям, используя, что } f(t) = \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right)' \right] = \\ &= \frac{e^{-pt}}{p} \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau \Big|_{t=0}^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{e^{-pt}}{p} \right)' \cdot \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) dt = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot \left(\int_0^t f(\tau) d\tau \right) dt \doteq \int_0^t f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5) \quad f_1 * f_2 &= \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \doteq \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau dt = \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t-\tau) dt d\tau = \\ &= \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau) \int_\tau^\infty e^{-p(t-\tau)} f_2(t-\tau) dt d\tau = \int_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau \int_0^\infty e^{-ps} f_2(s) ds \equiv F_1(p) F_2(p). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что для изменения порядка интегрирования достаточно равномерной по параметру сходимости всех участвующих в преобразованиях интегралов. Иначе это можно доказать по аналогии с доказательством теоремы 12.1 (стр. 89), представляя внутренний несобственный интеграл в виде ряда, проверяя равномерную сходимость ряда и интегрируя ряд почленно.

Кроме того, надо отметить, что приведённое доказательство опирается на легко проверяемый факт, что степень роста свёртки функций равна максимальной из степеней роста сворачиваемых функций.

$$6) \quad F^{(n)}(p) = \left(\int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \right)^{(n)} = \int_0^\infty e^{-pt} (-t)^n f(t) dt \doteq (-1)^n t^n f(t).$$

(Как было доказано в пункте 3) доказательства теоремы 12.1 (стр. 89), интеграл $F(p)$ можно дифференцировать по параметру под знаком интеграла.)

$$\begin{aligned} 7) \quad \int_p^\infty F(s) ds &= \int_p^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt ds = \\ &= \left[\text{в силу равномерной сходимости можно менять порядок интегрирования} \right] = \\ &= \int_0^\infty f(t) dt \int_p^\infty e^{-st} ds = \int_0^\infty f(t) \frac{e^{-pt}}{t} dt \doteq \frac{f(t)}{t}. \end{aligned}$$

$$8) \quad F(p + \lambda) = \int_0^\infty e^{-(p+\lambda)t} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-pt} \left(e^{-\lambda t} f(t) \right) dt \doteq e^{-\lambda t} f(t).$$

□

Таблица преобразования Лапласа.

- 1) $1 \doteq \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0;$
- 2) $t^\nu \doteq \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}, \quad \nu > -1, \quad \operatorname{Re} p > 0;$
- 3) $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Re} p > 0;$
- 4) $e^{\lambda t} \doteq \frac{1}{p-\lambda}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda;$
- 5) $\sin \omega t \doteq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|;$
- 6) $\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad \operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|.$

Доказательство. 1) $(\widetilde{1}) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot 1 dt = \frac{e^{-pt}}{-p} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = 0 - \frac{1}{-p} = \frac{1}{p}.$

2) $(\widetilde{t^\nu}) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot t^\nu dt = [s = xt, \quad t^\nu dt = \frac{s^\nu ds}{x^{\nu+1}}] = \frac{1}{x^{\nu+1}} \int_0^\infty e^{-s} s^\nu ds = \frac{\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu+1}}.$

3) В силу свойства Гамма-функции: $\Gamma(n+1) = n!$ для $n = 0, 1, 2, \dots$ и предыдущего пункта.

4) $(\widetilde{e^{\lambda t}}) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot e^{\lambda t} dt = \int_0^\infty e^{(\lambda-p)t} \cdot dt = \frac{e^{(\lambda-p)t}}{\lambda-p} \Big|_{t=0}^{t=\infty} = 0 - \frac{1}{\lambda-p} = \frac{1}{p-\lambda}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda.$

5) $(\widetilde{\sin \omega t}) = \left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right) = \frac{1}{2i} \left(\widetilde{e^{i\omega t}} - \widetilde{e^{-i\omega t}} \right) = \left[\text{в силу пункта 4) при } \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} (\pm i\omega) \right] =$
 $= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{p+i\omega - (p-i\omega)}{2i(p^2+\omega^2)} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},$
 $\operatorname{Re} p > \max\{\operatorname{Re}(i\omega), \operatorname{Re}(-i\omega)\} \equiv \max\{-\operatorname{Im} \omega, \operatorname{Im} \omega\} \equiv |\operatorname{Im} \omega|.$

6) $(\widetilde{\cos \omega t}) = \left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\widetilde{e^{i\omega t}} + \widetilde{e^{-i\omega t}} \right) = \left[\text{в силу пункта 4) при } \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} (\pm i\omega) \right] =$
 $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{p+i\omega + (p-i\omega)}{2(p^2+\omega^2)} = \frac{p}{p^2+\omega^2},$
 $\operatorname{Re} p > \max\{\operatorname{Re}(i\omega), \operatorname{Re}(-i\omega)\} \equiv \max\{-\operatorname{Im} \omega, \operatorname{Im} \omega\} \equiv |\operatorname{Im} \omega|.$

□

12.3. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений

Пример 12.1. Решить преобразованием Лапласа задачу Коши:

$$y'' + y' = 2e^x, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Пусть $y(x) \doteq Y(p)$. Тогда, по свойству 3., $y' \doteq pY(p) - y(0)$, а $y'' \doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$. В силу данных Коши $y(0) = y'(0) = 1$, левая часть уравнения имеет изображение:

$$y'' + y' \doteq p^2Y(p) + pY(p) - p - 1 - 1 = p(p+1)Y(p) - p - 2.$$

С другой стороны, правая часть (см. п. 4. таблицы), имеет изображение:

$$2e^x \doteq \frac{2}{p-1}.$$

Из двух последних соотношений получаем:

$$p(p+1)Y(p) - p - 2 = \frac{2}{p-1},$$

откуда

$$Y(p) = \frac{1}{p(p+1)} \left(\frac{2}{p-1} + p + 2 \right) = \frac{2 + p^2 + p - 2}{p(p+1)(p-1)} = \frac{1}{p-1}.$$

Таким образом, $Y(p) = \frac{1}{p-1}$. Возвращаясь к таблице изображений, пункт 4., видим, что $y(x) = e^x \doteq \frac{1}{p-1}$. Таким образом, данная задача Коши имеет решение $y(x) = e^x$, а в силу единственности решения задачи Коши, других решений у неё нет.

Пример 12.2. Решить преобразованием Лапласа задачу Коши:

$$y'' + y = x - 1, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

Пусть $y(x) \doteq Y(p)$. Тогда, по свойству 3., $y'' \doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$. В силу данных Коши $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$, левая часть уравнения имеет изображение:

$$y'' + y \doteq p^2Y(p) + Y(p) + p - 1 = (p^2 + 1)Y(p) + p - 1.$$

С другой стороны, правая часть (см. п. 3. и 1. таблицы), имеет изображение:

$$x - 1 \doteq \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Из двух последних соотношений получаем:

$$(p^2 + 1)Y(p) + p - 1 = \frac{1-p}{p^2},$$

откуда

$$Y(p) = \frac{1}{(p^2 + 1)} \left(\frac{1-p}{p^2} - p + 1 \right) = \frac{1-p-p^3+p^2}{p^2(p^2+1)} = \frac{(1-p)(1+p^2)}{p^2(p^2+1)} = \frac{1-p}{p^2}.$$

Таким образом, $Y(p) = \frac{1-p}{p^2}$. Возвращаясь к таблице изображений, пункты 1. и 3., видим, что $y(x) = x - 1 \doteq \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p} = \frac{1-p}{p^2}$. Таким образом, данная задача Коши имеет решение $y(x) = x - 1$, а в силу единственности решения задачи Коши, других решений у неё нет.

12.4. Применение преобразования Лапласа к решению интегральных и интегро - дифференциальных уравнений

Пример 12.3. Решить преобразованием Лапласа интегральное уравнение:

$$u(x) = x^3 + \int_0^x \sin(x-t)u(t)dt.$$

Пусть $u(x) \doteq U(p)$. Из пункта 5. таблицы (стр. 93) мы знаем, что $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$. Тогда по свойству 5.

$$\int_0^x \sin(x-t)u(t)dt \doteq U(p) \cdot \frac{1}{p^2+1},$$

а поскольку (пункт 3. таблицы) $x^3 \doteq \frac{3!}{p^4}$, то наше уравнение под действием преобразования Лапласа преобразуется в

$$U(p) = \frac{6}{p^4} + U(p) \cdot \frac{1}{p^2+1},$$

откуда, выразив $U(p)$, получим:

$$U(p) = \frac{p^2+1}{p^2} \cdot \frac{6}{p^4} = \frac{6}{p^4} + \frac{6}{p^6}.$$

Возвращаясь к таблице изображений, пункт 3., находим искомую функцию

$$u(x) = \frac{6 \cdot x^3}{3!} + \frac{6 \cdot x^5}{5!} = x^3 + \frac{x^5}{20}.$$

Пример 12.4. Решить преобразованием Лапласа интегро-дифференциальное уравнение:

$$y''(x) - \int_0^x \sin(x-t)(y''(t) + y(t)) dt = 2 \cos x$$

с начальными условиями

$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Пусть $y(x) \doteq Y(p)$. Из пункта 5. таблицы (стр. 93) мы знаем, что $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$, откуда по свойству 5.

$$\int_0^x \sin(x-t)y(t)dt \doteq Y(p) \cdot \frac{1}{p^2+1},$$

а поскольку $y'' \doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0)$ (по свойству 3.), в силу данных Коши $y(0) = y'(0) = 0$,

$$y''(x) \doteq p^2Y(p), \quad \int_0^x \sin(x-t)y''(t)dt \doteq p^2Y(p) \cdot \frac{1}{p^2+1}.$$

Вспоминая, что $\cos t \doteq \frac{p}{p^2+1}$ (пункта 6. таблицы), окончательно получаем, что под действием преобразования Лапласа наше уравнение преобразуется в

$$p^2Y(p) - Y(p) \cdot \frac{1}{p^2+1} - p^2Y(p) \cdot \frac{1}{p^2+1} = 2 \frac{p}{p^2+1},$$

откуда $(p^2 - 1)Y(p) = \frac{2p}{p^2+1}$. Выразив $Y(p)$, получим:

$$Y(p) = \frac{2p}{p^4 - 1}.$$

Представим поделную дробь в виде суммы простейших дробей методом неопределённых коэффициентов:

$$Y(p) = \frac{p}{p^4 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p+1} - \frac{p}{p^2+1}.$$

Возвращаясь к таблице изображений, пункты 4. и 6., находим искомую функцию

$$y(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} - \cos x = \operatorname{ch} x - \cos x.$$

12.5. Обращение преобразования Лапласа. Формула Меллина

В рассмотренных примерах у нас получалось, что изображение искомого решения оказывалось табличной функцией, и его оригинал легко находился из таблицы. Разумеется, такими простыми случаями не ограничивается сфера применения преобразования Лапласа к решению интегральных и дифференциальных уравнений. Его сила в том, что оно сводит уравнение интегральное или дифференциальное к уравнению алгебраическому, из которого изображение искомого решения легко выражается. Однако получившегося выражения может не оказаться в таблице стандартных изображений. В таких случаях пользуются формулой обратного преобразования Лапласа – формулой Меллина (теорема 12.2).

Теорема 12.2 (Формула Меллина).

Усл. $f(t) \in \Lambda(\alpha)$ – кусочно непрерывно дифференцируема, $f(t) \doteq F(p)$.

Утв.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad b > \alpha,$$

где интеграл берётся по любой прямой, параллельной мнимой оси, лежащей в области $\operatorname{Re} z > \alpha$ и понимается в смысле главного значения.

Доказательство. Нам понадобится теорема из курса математического анализа (см. Ильин В.А., Позняк Э.Г. "Основы математического анализа. Часть II", М. 2000г., стр. 350).

Теорема 12.3 (О представлении функции интегралом Фурье).

Усл. $\varphi(t)$ кусочно непрерывно дифференцируема, и для неё сходится интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt$.

Утв. В каждой точке непрерывности $\varphi(t)$ имеет место равенство

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} \varphi(x) dx \right) dy. \quad (12.5)$$

В качестве функции $\varphi(t)$ рассмотрим

$$\varphi(t) = e^{-bt} f(t) \quad \text{при некотором фиксированном } b > \alpha.$$

Тогда из формулы (12.5) получаем:

$$\begin{aligned} e^{-bt} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} e^{-bx} f(x) dx dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(b-iy)x} f(x) dx dy = [p = b - iy] = \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-px} f(x) dx dy \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt} F(p) dy. \end{aligned}$$

Надо отметить, что в последнем интеграле нельзя вынести $F(p)$ из-под знака интеграла, так как p и y связаны соотношением $p = b - iy$, и функция $F(p)$ неявно зависит от переменной интегрирования.

Домножим обе части полученного равенства на e^{bt} и учтём, что мы ввели обозначение $p = b - iy$.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} e^{bt} e^{-iyt} F(p) dy \equiv \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} e^{pt} F(p) dy.$$

Вспомним, что $p = b - iy \Rightarrow y = i(p - b)$, где $b > \alpha$ – фиксированное действительное число, и перепишем последнюю формулу:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} v.p. \int_{-\infty}^{\infty} e^{pt} F(p) dy = \left[y = i(p - b) \right] = \frac{i}{2\pi} v.p. \int_{b+i\infty}^{b-i\infty} e^{pt} F(p) dp = \\ &= \left[\text{меняем пределы интегрирования} \right] = \frac{1}{2\pi i} v.p. \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{pt} F(p) dp. \end{aligned}$$

□

Важные формулы

- Если $z = a + ib$, то $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, а при $a \neq 0$ ещё и $\operatorname{tg}(\arg z) = \frac{b}{a}$.
- Если $z = a + ib$, то $\bar{z} = a - ib$, и $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
- Числовые равенства: $i^2 = -1$, $1 = e^{2\pi k}$, $-1 = e^{i\pi}$, $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- Формулы Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$, $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$.
- $|e^{i\varphi}| = 1$, $\varphi \in \mathbb{R}$.
- $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \arg z + i \cdot 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Формула Коши – Адамара: $\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$.
- $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|$.
- Условия Коши – Римана: $f(z) = u + iv$ дифференцируема в точке $z_0 \iff$

$$\iff \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
- $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}$.
- Конформное отображение плоскости z на плоскость w , переводящее точки z_1, z_2, z_3 в точки w_1, w_2, w_3 осуществляет дробно-линейная функция

$$\frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1} \cdot \frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z - z_1}{z - z_3}.$$

•

$$\oint_C f(z) dz = 0, \quad \text{если } f(z) \text{ аналитична.}$$

- Интегральная формула Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}.$$

•

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Интеграл типа Коши ($f(z)$ непрерывна вдоль контура C)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad \text{контур } C \text{ не обязательно замкнут.}$$

- Ряд Тейлора аналитической в $\{z : |z - a| < R\}$ функции $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n, \quad \{z : |z - a| < R\}.$$

- Ряд Лорана аналитической в $\{z : r < |z - a| < R\}$ функции $f(z)$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad \text{где} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

- Вычет в изолированной особой точке

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta = c_{-1}.$$

- Вычет в полюсе порядка k :

$$\text{Res } f(a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - a)^k f(z)], \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- Вычет в бесконечности:

$$\text{Res } f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} [-zf(z)], \quad \text{если этот предел существует.}$$

- Основная теорема о вычетах

$$\int_{\Gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{n=N} \text{Res } f(a_n),$$

где точки a_n – изолированные особые точки $f(z)$, и все они лежат внутри Γ^+ , а на самом Γ^+ особых точек нет.

•

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iaz} f(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{n=1}^N \text{Res } (F(a_n)) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \text{Res } (F(b_m)) \right), \quad \text{где } F(z) = e^{iaz} f(z),$$

точки a_n – все изолированные особые точки $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$, а точки b_m – все полюса I-го порядка $f(z)$, лежащие на действительной оси $\text{Im } b_m = 0$.

- $$I = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \alpha x f(x) dx = \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{Res} (F(a_n)) + \pi i \sum_{m=1}^M \operatorname{Res} (F(b_m)) \right),$$

где $F(z) = e^{i\alpha z} f(z)$, $\alpha > 0$, точки a_n – все изолированные особые точки $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, а точки b_m – все полюса I-го порядка $f(z)$, лежащие на действительной оси $\operatorname{Im} b_m = 0$.

- $$I = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \alpha x f(x) dx = \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{Res} (F(a_n)) + \pi i \sum_{m=1}^M \operatorname{Res} (F(b_m)) \right),$$

где $F(z) = e^{i\alpha z} f(z)$, $\alpha > 0$, точки a_n – все изолированные особые точки $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, а точки b_m – все полюса I-го порядка $f(z)$, лежащие на действительной оси $\operatorname{Im} b_m = 0$.

- $$I = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{n=1}^N \operatorname{Res} (f(a_n)) + \pi i \sum_{m=1}^M \operatorname{Res} (f(b_m)),$$

где точки a_n – все изолированные особые точки $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, а точки b_m – все полюса I-го порядка $f(z)$, лежащие на действительной оси $\operatorname{Im} b_m = 0$.

- Преобразование Лапласа:
$$F(p) = \tilde{f} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad \operatorname{Re} p > \alpha.$$

- Обратное преобразование Лапласа (формула Меллина):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad b > \alpha,$$

где интеграл берётся по любой прямой, параллельной мнимой оси, лежащей в области $\operatorname{Re} z > \alpha$ и понимается в смысле главного значения.

Вопросы к экзамену

- 1) Комплексные числа и действия над ними. Формы записи комплексного числа.
- 2) Сфера Римана. Расширенная комплексная плоскость.
- 3) Предел последовательности комплексных чисел.
- 4) Числовые ряды в \mathbb{C} .
- 5) Критерий Коши сходимости числового ряда*. Необходимое условие сходимости.
- 6) Абсолютная сходимость числового ряда.
- 7) Функции комплексного переменного. Предел функции. Непрерывность.
- 8) Многолиственность и многозначность ФКП. Область однолиственности.
- 9) Функциональные ряды. Равномерная сходимость.
- 10) Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда*.
- 11) Степенные ряды. Круг и радиус сходимости. Формула Коши–Адамара.
- 12) Равномерная сходимость степенного ряда.
- 13) Задание элементарных функций рядами. Их свойства*.
- 14) Производная и дифференциал функции комплексного переменного.
- 15) Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции (условия Коши–Римана).
- 16) Аналитические функции. Понятие и свойства (одно – на выбор – с доказательством).
- 17) Гармонические функции. Сопряжённые гармонические функции.
- 18) Геометрический смысл производной функции комплексного переменного.
- 19) Конформное отображение.
- 20) Теорема Римана.
- 21) Принцип соответствия границ.
- 22) Дробно-линейная функция. Понятие и простейшие свойства.
- 23) Круговое свойство дробно-линейной функции.
- 24) Лемма об ортогональности окружности, проходящей через симметричные точки, данной окружности.
- 25) Лемма о точках пересечения окружностей, ортогональных данной окружности.
- 26) Симметричное свойство дробно-линейной функции.
- 27) Понятие и свойства интеграла функции комплексного переменного*.
- 28) Теорема Коши для односвязной области.

- 29) Теорема Коши для многосвязной области.
- 30) Первообразная функции комплексного переменного.
- 31) Интегральная формула Коши.
- 32) Аналитичность интеграла, зависящего от параметра*.
- 33) Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.
- 34) Интеграл типа Коши*.
- 35) Теорема Лиувилля.
- 36) Теорема Морера.
- 37) Теорема о среднем для аналитической функции.
- 38) Теорема о максимуме модуля аналитической функции*.
- 39) Теорема о почленном интегрировании равномерно сходящегося ряда*.
- 40) Теорема о почленном дифференцировании функционального ряда*.
- 41) Теорема об аналитичности суммы равномерно сходящегося ряда аналитических функций*.
- 42) Теорема о радиусе сходимости продифференцированного степенного ряда*.
- 43) Теорема о радиусе сходимости проинтегрированного степенного ряда*.
- 44) Теорема об аналитичности суммы степенного ряда*.
- 45) Вывод формулы суммы геометрической прогрессии.
- 46) Ряд Тейлора. Теорема о представлении аналитической функции рядом Тейлора.
- 47) Изолированные нули и теорема единственности аналитической функции.
- 48) Ряд Лорана. Теорема Лорана.
- 49) Единственность ряда Лорана*.
- 50) Определение и классификация изолированных особых точек.
- 51) Поведение функции в окрестности устранимой особой точки. Обратная теорема*.
- 52) Поведение функции в окрестности полюса.
- 53) Поведение функции в окрестности существенно особой точки.
- 54) Бесконечно удалённая особая точка.
- 55) Вычет в устранимой особой точке, полюсе первого порядка, полюсе порядка k , существенно особой точке, в $z = \infty$.
- 56) Основная теорема о вычетах и следствие из неё.
- 57) Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов.

- 58) Лемма Жордана.
- 59) Вычисление интегралов с помощью леммы Жордана. Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$.
- 60) Вычисление интегралов вида $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.
- 61) Интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x) dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ с полюсами на \mathbb{R} .
- 62) Преобразование Лапласа и его свойства (одно – на выбор – с доказательством).
- 63) Теорема об аналитичности изображения.
- 64) Поведение изображения на бесконечности.
- 65) Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений.
- 66) Обращение преобразования Лапласа. Формула Меллина.
- 67) Применение преобразования Лапласа к решению интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

(Знак "*" после вопроса означает "без доказательства".)

Список литературы

- [1] *Тихонов А.Н., Свешников А.Г. Теория функций комплексной переменной* М., Наука, 1967.
- [2] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного* М., Физматлит, 1958.